数学検定 解答 第423回 準1級2次 (No.1)

(選択)問題番号	
1 ● 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 選択した番号の○内をぬりつぶしてください。	

$0<A\leqq B\leqq C$ より

$\pi=A+B+C\geqq A+A+A=3A$ すなわち，$0<A\leqq\dfrac{\pi}{3}$

となる。

$0<\tan A\leqq\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ であり，$\tan A$ は整数より，$\tan A=1$ である。

$A+B+C=\pi$ より

$$\begin{aligned}\tan C&=\tan\{\pi-(A+B)\}\\&=-\tan(A+B)\\&=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\&=-\frac{1+\tan B}{1-\tan B}\end{aligned}$$

両辺に $1-\tan B$ をかけて整理すると

$$(1-\tan B)\tan C=-(1+\tan B)$$
$$\tan B\tan C-\tan B-\tan C-1=0$$
$$(\tan B-1)(\tan C-1)=2$$

△ABCは鋭角三角形であるから，$A\leqq B\leqq C<\dfrac{\pi}{2}$ すなわち，$1\leqq\tan B\leqq\tan C$

である。

また，$\tan B-1$，$\tan C-1$ は0以上の整数であるから

$(\tan B-1,\ \tan C-1)=(1,\ 2)$ すなわち，$(\tan B,\ \tan C)=(2,\ 3)$

となる。

以上より

$\tan A=1$，$\tan B=2$，$\tan C=3$

(答) $\tan A=1$，$\tan B=2$，$\tan C=3$

ここにバーコードシールを貼ってください。

準1級2次

太わくの部分は必ず記入してください。

ふりがな		受検番号
姓	名	―
生年月日	昭和 平成 令和 西暦　年　月　日生	
性別(□をぬりつぶしてください) 男□ 女□		年齢　歳
住所	□□□-□□□□	/4

T2414G04

公益財団法人 日本数学検定協会

42304112

(選択)問題番号	
1 ○ 2 ● 3 ○ 4 ○ 5 ○ 選択した番号の○内をぬりつぶしてください。	(1) $a_n > 0$ より，漸化式の両辺を2を底とする対数をとって変形すると $6\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2} - 5\log_2 a_{n+1} = 0$ この式を変形すると $\log_2 a_{n+2} - 2\log_2 a_{n+1} = 3(\log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n)$ …① $\log_2 a_{n+2} - 3\log_2 a_{n+1} = 2(\log_2 a_{n+1} - 3\log_2 a_n)$ …② ①より $\log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n = 3^{n-1}(\log_2 a_2 - 2\log_2 a_1)$ $\log_2 a_2 - 2\log_2 a_1 = 5 - 2 = 3$ より $\log_2 a_{n+1} - 2\log_2 a_n = 3^n$ …①′ ②より $\log_2 a_{n+1} - 3\log_2 a_n = 2^{n-1}(\log_2 a_2 - 3\log_2 a_1)$ $\log_2 a_2 - 3\log_2 a_1 = 5 - 3 = 2$ より $\log_2 a_{n+1} - 3\log_2 a_n = 2^n$ …②′ ①′−②′より $\log_2 a_n = 3^n - 2^n$ よって $a_n = 2^{3^n - 2^n}$ (答) $a_n = 2^{3^n - 2^n}$ (2) (答) 16

(選択)
問題
番号
1 ○
2 ○
3 ●
4 ○
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) 正n角形の外接円の中心をO，正n角形の隣り合う2頂点をA，Bとし，点Oから辺ABに垂線を引き，辺ABとの交点をHとする。

$$\angle \mathrm{AOH}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{n}$$

より

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=2\mathrm{OA}\sin\frac{\pi}{n} \text{ すなわち，} \mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

である。

また正n角形の面積はaであり，$\cos\frac{\pi}{n}\neq 0\ (n\geqq 3)$より

$$\begin{aligned} a&=n\cdot\triangle \mathrm{OAB}\\ &=n\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\\ &=n\cdot\left(\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\\ &=\frac{n\cdot \mathrm{AB}^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

すなわち，$\mathrm{AB}=2\sqrt{\frac{a}{n}\tan\frac{\pi}{n}}$である。

よって

$$L_n=n\cdot \mathrm{AB}=2\sqrt{an\tan\frac{\pi}{n}}$$

(答) $L_n=2\sqrt{an\tan\frac{\pi}{n}}$

(2) $$L_n=2\sqrt{a}\cdot\sqrt{n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}=2\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}}\cdot\sqrt{\pi}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}=1$より

$$\lim_{n\to\infty}L_n=2\sqrt{a}\cdot\sqrt{1\cdot 1}\cdot\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi a}$$

(答) $2\sqrt{\pi a}$

(選択)
問題
番号
1 ○
2 ○
3 ○
4 ●
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) $\beta \neq 0$ より

$$(0-\alpha)^5+(\alpha-\beta)^5+(\beta-0)^5=0$$

の両辺を $\beta^5(\neq 0)$ で割ると

$$\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^5+\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)^5+1=0$$

$z=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと，$z\neq 0$，$1\cdots(*)$ で

$$(-z)^5+(z-1)^5+1=0$$

$$(z-1)(z-1)^4-(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$$(z-1)(-5z^3+5z^2-5z)=0$$

$$z(z-1)(z^2-z+1)=0$$

$(*)$ より，$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$　(i は虚数単位)

$\arg z=\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{3}$ より $\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{3}$，また $|z|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=1$ より $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$

ゆえに△OABは正三角形である。

よって，(命題ア)は真である。

(答) 真

---

(2) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=1$ のとき $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ であるから，(1)でみたように

△OABは正三角形であるが

$$(0-\alpha)^6+(\alpha-\beta)^6+(\beta-0)^6$$

$$=\alpha^6+(\alpha-\beta)^6+\beta^6$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^6+1$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6+\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^6+1$$

$$=(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)+(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)+1$$

$$=3$$

つまり，$(0-\alpha)^6+(\alpha-\beta)^6+(\beta-0)^6=0$ は成り立たない。

よって，(命題イ)は偽である。

(答) 偽

（選択）問題番号
1 ○
2 ○
3 ○
4 ○
5 ●

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1)　（答）$\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

---

(2)　$X=x+11$，$Y=y+22$，$Z=z+33$，$W=w+44$とおくと，$x \geqq -11$，$y \geqq -22$，$z \geqq -33$，$w \geqq -44$よりX，Y，Z，Wはいずれも0以上となり，
$46x+46y+46z+7w=-1320$は

$$46(X-11)+46(Y-22)+46(Z-33)+7(W-44)=-1320$$
$$46X+46Y+46Z+7W-3344=-1320$$
$$46(X+Y+Z)+7W=2024 \quad \cdots①$$

したがって，求める整数の組$(x,\ y,\ z,\ w)$の総数は，①を満たす0以上の整数の組$(X,\ Y,\ Z,\ W)$の総数に等しい。

ここで，$X+Y+Z=m$とすると①は

$$46m+7W=2024$$
$$7W=2024-46m$$
$$7W=46(44-m)$$

46と7は互いに素かつ$W \geqq 0$だから，$44-m$は0以上の7の倍数である。
したがって

$$m=2,\ 9,\ 16,\ 23,\ 30,\ 37,\ 44$$

これと(1)の結果より，①を満たす0以上の整数の組$(X,\ Y,\ Z,\ W)$の総数は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 18+\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 25+\frac{1}{2}\cdot 31\cdot 32+\frac{1}{2}\cdot 38\cdot 39+\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 46$$
$$=6+55+153+300+496+741+1035$$
$$=2786$$

（答）2786

問題6
(必須)

$x^5+x^4+ax+49$ を x^3+bx+c で割ったときの商は２次式であり，２次の係数が１であることから x^2+px+q（p，q は定数）とおくことができる。

よって

$$x^5+x^4+ax+49=(x^3+bx+c)(x^2+px+q)$$

すなわち

$$x^5+x^4+ax+49=x^5+px^4+(b+q)x^3+(c+bp)x^2+(bq+cp)x+cq$$

と表され，これは x に関する恒等式である。

各項の係数を比較して

$$\begin{cases} 1=p & \cdots① \\ 0=b+q & \cdots② \\ 0=c+bp & \cdots③ \\ a=bq+cp & \cdots④ \\ 49=cq & \cdots⑤ \end{cases}$$

①より，$p=1$

②，③より，$c=q=-b$

④より，$a=-b^2-b$

⑤より，$b^2=49$ すなわち，$b=\pm 7$

以上より，求める値は

$(a,\ b,\ c)=(-56,\ 7,\ -7)$，$(-42,\ -7,\ 7)$

(答) $(a,\ b,\ c)=(-56,\ 7,\ -7)$，$(-42,\ -7,\ 7)$

問題7（必須）	

問題7
（必須）

(1) 曲線 $y=\log_e x$ と直線 $y=\log_e a$ の交点は $(a,\ \log_e a)$ のみである。

$1 \leqq x \leqq a$ のとき $\log_e x \leqq \log_e a$ で，$a \leqq x \leqq 2$ のとき $\log_e x \geqq \log_e a$ であるから

$$
\begin{aligned}
S(a) &= S_1(a)+S_2(a)\\
&=\int_1^a(\log_e a-\log_e x)\,dx+\int_a^2(\log_e x-\log_e a)\,dx\\
&=\Big[x\log_e a-x(\log_e x-1)\Big]_1^a+\Big[x(\log_e x-1)-x\log_e a\Big]_a^2\\
&=\{a\log_e a-a(\log_e a-1)\}-(\log_e a+1)+\{2(\log_e 2-1)-2\log_e a\}\\
&\qquad -\{a(\log_e a-1)-a\log_e a\}\\
&=-3\log_e a+2a+2\log_e 2-3
\end{aligned}
$$

（答） $S(a)=-3\log_e a+2a+2\log_e 2-3$

---

(2) $S(a)$ を a で微分すると

$$S'(a)=-\frac{3}{a}+2$$

$S'(a)=0$ となる a の値は $a=\dfrac{3}{2}$ であるから，$S(a)$ の $1<a<2$ における増減表は下のようになる。

a	1	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{3}{2}$ のとき極小かつ最小となり，その値は

$$S\left(\frac{3}{2}\right)=-3\log_e\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+2\log_e 2-3=\log_e\frac{32}{27}$$

（答） $a=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\log_e\dfrac{32}{27}$