（選択）問題番号
1 ●
2 ○
3 ○
4 ○
5 ○
選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

以下，正の整数 α，β の最大公約数を $\gcd(\alpha,\ \beta)$ と表す。

$d=\gcd(a,\ b)$ かつ $a>b$ より

$$a=da',\quad b=db',\quad \gcd(a',\ b')=1$$

を同時に満たす正の整数 a'，b' $(a'>b')$ が存在する。このとき

$$2^a-1=(2^d-1)\sum_{i=1}^{a'}(2^d)^{i-1},\quad 2^b-1=(2^d-1)\sum_{j=1}^{b'}(2^d)^{j-1}$$

が成り立つ。したがって，2^d-1 は 2^a-1 と 2^b-1 の公約数である。ここで

$$B_1=\sum_{i=1}^{a'}(2^d)^{i-1},\quad B_2=\sum_{j=1}^{b'}(2^d)^{j-1}$$

に対し，$\gcd(B_1,\ B_2)=1$ であることを示せばよい。

ユークリッド互除法の性質から

$$x_1=a',\quad x_2=b',\quad x_m=q_{m+1}x_{m+1}+x_{m+2}\quad \cdots①$$

を満たす正の整数からなる数列 $\{x_\ell\}$，$\{q_{\ell+1}\}$ $(\ell=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が存在し，ある正の整数 r に対し

$$x_{r+2}=1\quad \cdots②$$

が成り立つ。

以下，$2^d=t$ とし $D_n=\sum_{k=1}^{n}t^{k-1}$，さらに $I_m=D_{x_m}$ とおくと

$$\begin{aligned}I_m&=t^{x_{m+2}}\{1+t^{x_{m+1}}+t^{2x_{m+1}}+\cdots+t^{(q_{m+1}-1)x_{m+1}}\}(1+t+t^2+\cdots+t^{x_{m+1}-1})\\&\qquad+1+t+t^2+\cdots+t^{x_{m+2}-1}\\&=I_{m+1}\left\{t^{x_{m+2}}\sum_{u=1}^{q_{m+1}}t^{(u-1)x_{m+1}}\right\}+I_{m+2}\end{aligned}$$

である。ここで，$Q_{m+1}=t^{x_{m+2}}\sum_{u=1}^{q_{m+1}}t^{(u-1)x_{m+1}}$ とおくことにより

$$I_1=B_1,\quad I_2=B_2,\quad I_m=Q_{m+1}I_{m+1}+I_{m+2}$$

となり，$I_{m+1}>I_{m+2}$ から①と同様の議論により，②で定めた r に対して

$$I_{r+2}=D_{x_{r+2}}=D_1=1$$

が成り立つ。

よって $\gcd(B_1,\ B_2)=1$，すなわち 2^d-1 は 2^a-1 と 2^b-1 の最大公約数であることが示された。

太わくの部分は必ず記入してください。

ここにバーコードシールを貼ってください。

1級2次

ふりがな		受検番号
姓	名	－
生年月日	昭和・平成・令和・西暦　年　月　日生	
性別（□をぬりつぶしてください）男□ 女□		年齢　歳
住所	□□□-□□□□	／4

T2414G04

42304102

（選択）問題番号 1 2 3 4 5（2を選択）

選択した番号の◯内をぬりつぶしてください。

$$\begin{aligned}&\sin ax\cdot\sin bx\cdot\sin cx\\ &=-\frac{1}{2}\sin ax\cdot\{\cos(b+c)x-\cos(b-c)x\}\\ &=-\frac{1}{2}\{\sin ax\cdot\cos(b+c)x-\sin ax\cdot\cos(b-c)x\}\\ &=-\frac{1}{4}\{\sin(a+b+c)x+\sin(a-b-c)x-\sin(a+b-c)x-\sin(a-b+c)x\}\end{aligned}$$

すなわち，$x\neq 0$ならば

$$\begin{aligned}&\frac{\sin ax\cdot\sin bx\cdot\sin cx}{x}\\ &=-\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b+c)x}{x}+\frac{\sin(a-b-c)x}{x}-\frac{\sin(a+b-c)x}{x}-\frac{\sin(a-b+c)x}{x}\right\}\quad\cdots①\end{aligned}$$

次に実数rに対し，$J=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin rx}{x}dx$を考える。

$r>0$のとき，$rx=t$とおくことにより

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin rx}{rx}\cdot r\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}\quad\cdots②$$

$r=0$のとき，$\sin rx=0$より，$J=0\quad\cdots③$

$r<0$のとき，$-r>0$なので②を用いると

$$J=\int_0^\infty\frac{-\sin(-r)x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}\quad\cdots④$$

一方，仮定より$a\geqq b\geqq c>0$なので

$a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$

だから②より

$$\int_0^\infty\frac{\sin(a+b+c)x}{x}dx=\int_0^\infty\frac{\sin(a+b-c)x}{x}dx=\int_0^\infty\frac{\sin(a-b+c)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\quad\cdots⑤$$

したがって，①，⑤より

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty\frac{\sin ax\cdot\sin bx\cdot\sin cx}{x}dx\\ &=-\frac{1}{4}\left\{\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty\frac{\sin(a-b-c)x}{x}dx-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right\}\\ &=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{\sin(a-b-c)x}{x}dx\end{aligned}$$

以上より

$a>b+c$のとき，②より $I=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\pi}{2}=0$

$a=b+c$のとき，③より $I=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\cdot 0=\dfrac{\pi}{8}$

$a<b+c$のとき，④より $I=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

となる。

（答）$a>b+c$のとき $I=0$

$a=b+c$のとき $I=\dfrac{\pi}{8}$

$a<b+c$のとき $I=\dfrac{\pi}{4}$

(選択)
問題
番号
1 ○
2 ○
3 ●
4 ○
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) α，β，γは互いに異なるから，平行移動，回転移動，定数倍により，$\beta=1$，$\gamma=0$としても一般性を失わない。このとき，$(\alpha-\beta)^7+(\beta-\gamma)^7+(\gamma-\alpha)^7=0$は

$$(\alpha-1)^7+1^7+(-\alpha)^7=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha-1)^6-(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$$
$$(\alpha-1)\cdot(-7\alpha)(\alpha^4-2\alpha^3+3\alpha^2-2\alpha+1)=0$$
$$\alpha(\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1)^2=0$$

$\alpha\neq 0$かつ$\alpha\neq 1$だから，$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$（$i$は虚数単位）

一方，$\beta=1$，$\gamma=0$のとき，△ABCが正三角形であるための必要十分条件は

$$|\alpha-\gamma|=|\beta-\gamma| \text{ かつ } \arg\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\pm\frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{（複号同順）}$$

以上より，$(\alpha-\beta)^7+(\beta-\gamma)^7+(\gamma-\alpha)^7=0$を満たすとき，△ABCは正三角形である。よって，命題は真である。

(答) 真

---

(2) (1)と同様に$\beta=1$，$\gamma=0$としても一般性を失わない。

このとき，$(\alpha-\beta)^n+(\beta-\gamma)^n+(\gamma-\alpha)^n=0$は

$$(\alpha-1)^n+1+(-\alpha)^n=0 \quad \cdots①$$

また，△ABCは正三角形だから

$$\alpha=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \text{（複号同順）}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(\alpha-1)^n+1+(-\alpha)^n\\
&=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^n+1+\left(\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right)^n\\
&=\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n+1+\left\{\cos\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n\\
&=\left(\cos\frac{2}{3}n\pi\pm i\sin\frac{2}{3}n\pi\right)+1+\left(\cos\frac{2}{3}n\pi\mp i\sin\frac{2}{3}n\pi\right) \text{（複号同順）}\\
&=2\cos\frac{2}{3}n\pi+1 \quad \cdots②
\end{aligned}$$

ここで正の整数mに対して，$n=3m$のとき②の値は3，$n=3m\pm1$のとき②の値は0となる。すなわち，nが3の倍数でないとき，αは①を満たし，nが3の倍数のとき，αは①を満たさない。

以上より，nが3の倍数でないとき命題は真，nが3の倍数のとき命題は偽である。

(答) nが3の倍数でないとき真
nが3の倍数のとき偽

(選択)
問題
番号
1 ○
2 ○
3 ○
4 ●
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) 帰無仮説 $H_0: p=0.2$ を対立仮説 $H_1: p>0.2$ に対して有意水準0.05で右側検定をする。

$n=100$ は十分大きいので，$\overline{p}$ を標本比率とすると H_0 のもと検定統計量

$$T_1=\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

検定統計量の実現値 t_1 は

$$t_1=\frac{0.3-0.2}{\sqrt{\dfrac{0.2(1-0.2)}{100}}}=2.5$$

これは，$N(0,\ 1)$ における上側0.05点の値1.645より大きいので，H_0 は棄却される。

よって，赤球の個数の割合は全体の20％より大きいといえる。

(答) 全体の20％より大きいといえる

---

(2) (1)と同様に帰無仮説 $H_0: p=0.2$ を対立仮説 $H_1: p>0.2$ に対して有意水準0.05で右側検定をする。

n 回の試行のうち赤球が出る回数を X とすると，H_0 のもと X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

整数 $k\,(0\leqq k\leqq n)$ に対し

$$n_1=2(n-k+1),\ n_2=2k,\ f=\frac{n_2(1-p)}{n_1 p}$$

とし，F_0 を F 分布 $F(n_1,\ n_2)$ に従う確率変数とすると

$$P(k\leqq X\leqq n)=P(F_0>f)$$

$n=20$，$k=6$ のとき

$$n_1=30,\ n_2=12,\ f=\frac{12\cdot 0.8}{30\cdot 0.2}=1.6$$

$F(n_1,\ n_2)$ の上側 α 点を $F_{n_2}^{n_1}(\alpha)$ とすると，F 分布表より

$$F_{12}^{30}(0.05)=2.466$$

これは $f=1.6$ より大きいので，H_0 は棄却されない。

よって，赤球の個数の割合は全体の20％より大きいとはいい切れない。

(答) 全体の20％より大きいとはいい切れない

(選択)
問題
番号

1 ○
2 ○
3 ○
4 ○
5 ●

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

2以上の整数 n について，$(n-1)^2<n(n-1)<n^2<n(n+1)<(n+1)^2$ より

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{3}{3\sqrt[3]{n^2}}<\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}=3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{3}{3\sqrt[3]{n^2}}>\frac{3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

すなわち

$$3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}) \quad \cdots①$$

が成り立つ。

一方，$S=1+\sum_{n=2}^{1000000}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ とすると，①より

$$\sum_{n=2}^{1000000}3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})<\sum_{n=2}^{1000000}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<\sum_{n=2}^{1000000}3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})$$

$$3(\sqrt[3]{1000001}-\sqrt[3]{2})<\sum_{n=2}^{1000000}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3(\sqrt[3]{1000000}-\sqrt[3]{1}) \quad \cdots②$$

ここで

$$3(\sqrt[3]{1000000}-\sqrt[3]{1})=297 \quad \cdots③$$

であり

$$100=\sqrt[3]{1000000}<\sqrt[3]{1000001}$$

$$\sqrt[3]{2}<\sqrt[3]{2.197}=1.3$$

より

$$98.7<\sqrt[3]{1000001}-\sqrt[3]{2}$$

$$296.1<3(\sqrt[3]{1000001}-\sqrt[3]{2}) \quad \cdots④$$

③，④より②は

$$296.1<\sum_{n=2}^{1000000}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<297$$

以上より

$$297.1<S<298$$

すなわち，S の整数部分は297である。

(答) 297

問題６
（必須）

３次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ を定めると，$S={}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}$ と表される。ただし，${}^t\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ の転置行列である。

３次単位行列を I とすると，A の固有多項式

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 & -2 \\ -3 & \lambda-5 & 3 \\ -2 & 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & 3 \\ \lambda-6 & 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda-5 & 3 \\ 1 & 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\{(\lambda-5)(\lambda-4)-9-9+2(\lambda-5)\}$$

$$=(\lambda-6)(\lambda-8)(\lambda+1)$$

より，A の固有値は $\lambda=-1,\ 6,\ 8$ である。

次に３次零ベクトル $\mathbf{0}$ に対し

$$(A+I)\boldsymbol{w}_1=\mathbf{0},\ (A-6I)\boldsymbol{w}_2=\mathbf{0},\ (A-8I)\boldsymbol{w}_3=\mathbf{0}$$

を満たす $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ をそれぞれ求める。

$$A+I=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix},\ A-6I=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ A-8I=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{w}_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_2=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_3=c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\quad (c_1,\ c_2,\ c_3 \text{は任意定数})$$

したがって，たとえば $c_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$c_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$c_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とし

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$，$\boldsymbol{q}_3$ は互いに直交する単位ベクトルで

$$Q=(\boldsymbol{q}_1\ \ \boldsymbol{q}_2\ \ \boldsymbol{q}_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

で定まる Q は直交行列で $Q^{-1}AQ={}^tQAQ=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ を満たす。

したがって，$T=Q$ とすることにより

$$S={}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}=({}^t\boldsymbol{v}_0{}^tT)A(T\boldsymbol{v}_0)=(x_0\ y_0\ z_0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}=-x_0^2+6y_0^2+8z_0^2$$

すなわち，$\alpha=-1$，$\beta=6$，$\gamma=8$ である。

（答） T の例：$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$，$\alpha=-1$，$\beta=6$，$\gamma=8$

問題7
（必須）

$x-2z+4=0$ を変形すると $z=\dfrac{1}{2}x+2$ で表され，$-2\leqq x\leqq 2$ において $z>0$ を満たす。これより

$$D=\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq \frac{1}{2}x+2\right\}$$

と表される。ここで，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=t$ とおくと，D は

$$D'=\left\{(r,\ \theta,\ t)\,\middle|\,1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}r\cos\theta+2\right\}$$

にうつされる。また

$$\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

であり，$\rho(x,\ y,\ z)=x^2+y^2=r^2$ であるから，求める質量 M は

$$\begin{aligned}M&=\iiint_{D'}r^2\cdot r\,dr\,d\theta\,dt\\&=\int_{r=1}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}r^3\,dr\,d\theta\int_0^{\frac{1}{2}r\cos\theta+2}dt\\&=\int_{r=1}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^4\cos\theta+2r^3\right)dr\,d\theta\\&=\int_{r=1}^{2}\left[\frac{1}{2}r^4\sin\theta+2r^3\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi}dr\\&=\int_1^2 4\pi r^3\,dr\\&=\pi\left[r^4\right]_1^2\\&=15\pi\end{aligned}$$

（答） $M=15\pi$