数学検定　解　答

1級2次　（No.1）

（選択）問題番号
1 ●
2 ○
3 ○
4 ○
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

$n=0$ のとき，$4^n(8m+7)=8m+7$ から，$4^n(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができない。

０以上の整数 k に対し，$4^k(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができないと仮定する。

このとき，$4^{k+1}(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができるとすると

$$4^{k+1}(8m+7)=x^2+y^2+z^2 \quad \cdots ①$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が存在するはずである。

ここで，整数 ℓ に対して

$$(2\ell)^2\equiv 0 \pmod 4,\ (2\ell+1)^2\equiv 1 \pmod 4$$

であり，①の左辺は４の倍数であることから，①の右辺も４の倍数となる。これより，x，y，z はいずれも偶数である。

一方，①の両辺を４で割ると

$$4^k(8m+7)=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2 \quad \cdots ②$$

である。しかし，x，y，z はいずれも偶数であることから，$\frac{x}{2}$，$\frac{y}{2}$，$\frac{z}{2}$ はいずれも整数である。このことと②より，$4^k(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができないと仮定したことに矛盾する。

したがって，$4^{k+1}(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができない。

よって数学的帰納法より，m，n を０以上の整数とするとき，整数 $4^n(8m+7)$ を３つの平方数の和で表すことができないことが証明された。

太わくの部分は必ず記入してください。

ここに２次検定用のバーコードシールを貼ってください。

ふりがな		受検番号
姓	名	—
生年月日	大正 昭和 平成 西暦　年　月　日生	
性別（□をぬりつぶしてください）男□ 女□		年齢　歳
住所	□□□-□□□□	／4

（選択）問題番号
1 ○
2 ●
3 ○
4 ○
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

$n \geqq 1$に対し

$$0 < \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} < \frac{1}{9n^2}$$

であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2}$が収束することから

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$

も収束する。

ここで，次のべき級数$f(x)$，$g(x)$を考える。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1},\quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} \quad (|x| < 1)$$

$f(x)$，$g(x)$をそれぞれ項別微分することにより

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3},\quad g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{x}{1-x^3}$$

これより

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1+x+x^2}$$

であり，与えられた級数の和は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0}\{f(x) - g(x)\} &= \lim_{a\to 1-0}\int_0^a \{f'(x) - g'(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx\end{aligned}$$

に等しい。ここで

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

であることから，$u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$とおくことにより

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx &= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctan}\,u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{3} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\end{aligned}$$

（答）$\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

（選択）問題番号

1 ○
2 ○
3 ●
4 ○
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

頂点Dを始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boldsymbol{c}$とおく。このとき

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|^2\\&=3(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\quad\cdots Ⓐ\end{aligned}$$

ここで，行列を用いて

$$S=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix},\quad A=(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})$$

とおくと，$^tAA=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{a}|^2&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}&|\boldsymbol{b}|^2&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}&|\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}$より，Ⓐは$\mathrm{tr}(S^tAA)$に等しい。ここで

$$C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&5&-1\\-1&-1&5\end{pmatrix}$$

とすると，$C^2=S$が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(S(^tAA))&=\mathrm{tr}(CC(^tAA))=\mathrm{tr}(C(^tAA)C)=\mathrm{tr}((C^tA)(AC))\\&=\mathrm{tr}((^tC^tA)(AC))=\mathrm{tr}(^t(AC)AC)\end{aligned}$$

ここで，ACが実正方行列であるので，①より，$^t(AC)AC$は実対称行列であり，その固有値はすべて，0または正である。さらに，$\det C=4$，$|\det A|=6V>0$だから，$\det(AC)\neq0$，すなわち

$$\det(^t(AC)AC)=\det(^t(AC))\cdot\det(AC)=\{\det(AC)\}^2>0$$

が成り立つので，$^t(AC)AC$の固有値はすべて正である。

これより，②から

$$\mathrm{tr}(^t(AC)AC)\geqq3\{\det(^t(AC)AC)\}^{\frac{1}{3}}=3(\det A)^{\frac{2}{3}}\cdot(\det C)^{\frac{2}{3}}=12\cdot(3V)^{\frac{2}{3}}$$

以上より，不等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2\geqq12\cdot(3V)^{\frac{2}{3}}$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは，S^tAAが単位行列の定数倍，すなわち$^tAA=$（S^{-1}の定数倍）のときであるが

$$S^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

だから，$^tAA=$（S^{-1}の定数倍）となるのは，$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$のときより

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|\text{かつ}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}$$

すなわちAD＝BD＝CDかつ∠ADB＝∠BDC＝∠CDA＝60°のときに限る。これは四面体ABCDが正四面体のときに限ることを表す。

よって，与えられた不等式の等号が成り立つのは，四面体ABCDが正四面体のときに限る。

(選択)問題番号

1 ○
2 ○
3 ○
4 ●
5 ○

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) H_0の下で，Xは正規分布$N\left(170,\ \dfrac{5.0^2}{100}\right)$に従う。これより検定統計量$Z$を

$$Z=\frac{X-170}{\dfrac{5.0}{\sqrt{100}}}$$

とすると，Zは標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。

したがって，Zの実現値Tは

$$T=\frac{170.9-170}{\dfrac{5.0}{\sqrt{100}}}=\frac{9}{5}=1.8$$

である。

一方，$|Z|>z$を満たす確率$P(|Z|>z)$に対して

$P(|Z|>z)=0.05$

すなわち

$P(Z>z)=0.025\ (=0.5-0.475)$

を満たす正の実数zは，$P(0\leqq Z\leqq z)=0.475$にもっとも近い値をとることから，正規分布表より$z=1.96$であることがわかる。

以上より，$T<1.96$であることからTは棄却域に含まれず，H_0を棄却することはできない。

(答) H_0を棄却することはできない

---

(2) (1)で求めたZの実現値が1.8であることから，求める値は(1)で定めたZに対して，$|Z|>1.8$である確率$P(|Z|>1.8)$に等しい。

これより，正規分布表の値を用いて

$$\begin{aligned}P(|Z|>1.8)&=P(Z<-1.8)+P(1.8<Z)\\&=2P(1.8<Z)\\&=2\{0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.8)\}\\&=2(0.5-0.46407)\\&=2\cdot 0.03593\\&=0.07186\end{aligned}$$

よって，求める値は小数第4位を切り上げて0.072である。

(答) 0.072

（選択）
問題
番号
1 ○
2 ○
3 ○
4 ○
5 ●

選択した番号の○内をぬりつぶしてください。

(1) $k=1$ のときは図3のように，しきつめ可能である。

$k=m$（m は正の整数）のとき，しきつめ可能であると仮定する。

$k=m+1$ のとき，図4のように与えられた図形を $k=m$ のときの図形，縦 $3m+1$，横3の長方形および縦3，横 $3(m+1)+1$ の長方形に分割することにより，しきつめ可能である。

以上より，数学的帰納法から $n=3k+1$ のとき，しきつめ可能である。

図3

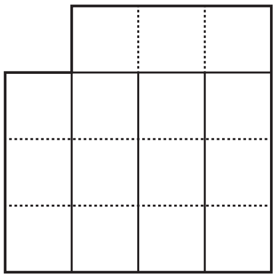
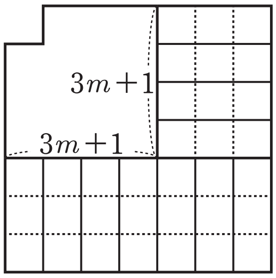


図4

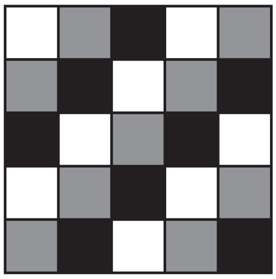


---

(2) 次の規則に従って1辺の長さが n である正方形を3色に塗り分ける（$n=5$ のときは図5のようになる）。

- 左上の隅にある1辺の長さが1の正方形（以下，マス目とよぶ）を白色で塗る。
- 白色で塗ったマス目の右および下に隣り合うマス目を灰色で塗る。
- 灰色で塗ったマス目の右および下に隣り合うマス目を黒色で塗る。
- 黒色で塗ったマス目の右および下に隣り合うマス目を白色で塗る。
- 以上を，すべてのマス目の色が塗られるまで繰り返す。

図5



このように塗られた図形にピースを並べた場合，1個のピースに対し，それを構成する正方形は，図6のように白，灰，黒色で塗った1つずつのマス目に対応する。

図6

ここから左上の隅にある白色の正方形1個を除くと，塗られたマス目の個数はそれぞれ

白…$\displaystyle\sum_{x=1}^{k}(3x+1)+\sum_{y=1}^{k}(3y)=3k^2+4k$

灰…$\displaystyle\sum_{x=0}^{k}(3x+2)+\sum_{y=1}^{k}(3y-1)=3k^2+4k+2$

黒…$\displaystyle\sum_{x=1}^{k}(3x)+\sum_{y=0}^{k}(3y+1)=3k^2+4k+1$

となり，白，灰，黒色で塗ったマス目の個数が一致しない。

これより，しきつめ不可能である。

問題６（必須）

(1) $f:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，すなわち

$3x_1-4x_2=0$ …①

$-6x_1+8x_2=0$ …②

を満たすベクトル$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$を求める。

①と②は同値な式であり，①より$3x_1=4x_2$だから，$x_1=4c$（cは実定数）とおくと，$x_2=3c$となる。

よって

$$\mathrm{Ker}f=\left\{c\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\,\middle|\,c\text{は実数}\right\}$$

（答）$\mathrm{Ker}f=\left\{c\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\,\middle|\,c\text{は実数}\right\}$

---

(2) $f:\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}10\\-20\end{pmatrix}=-70\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-30\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

$f:\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-27\\54\end{pmatrix}=189\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+81\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

より

$$\begin{pmatrix}10&-27\\-20&54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-70&189\\-30&81\end{pmatrix}$$

よって，求める表現行列は

$$\begin{pmatrix}-70&189\\-30&81\end{pmatrix}$$

（答）$\begin{pmatrix}-70&189\\-30&81\end{pmatrix}$

問題7（必須）	

(∗)に $L=1$，$R=20$，$C=10^{-2}$，$E(t)=100\sin 2t$ を代入すると

$$\frac{d^2I}{dt^2}+20\frac{dI}{dt}+100I=200\cos 2t \quad \cdots ①$$

ここで，微分方程式

$$\frac{d^2I}{dt^2}+20\frac{dI}{dt}+100I=0 \quad \cdots (∗∗)$$

の特性方程式である，u の2次方程式 $u^2+20u+100=0$ を解くと

$$(u+10)^2=0$$

$$u=-10 \text{（重解）}$$

これより，微分方程式(∗∗)の一般解は

$I=(C_1+C_2t)e^{-10t}$　（C_1，C_2 は任意定数，e は自然対数の底）

次に，$I=k_1\sin 2t+k_2\cos 2t$（k_1，k_2 は定数）を①に代入すると

$$(-4k_1\sin 2t-4k_2\cos 2t)+20(2k_1\cos 2t-2k_2\sin 2t)+100(k_1\sin 2t+k_2\cos 2t)=200\cos 2t$$

$$(96k_1-40k_2)\sin 2t+(40k_1+96k_2)\cos 2t=200\cos 2t$$

これが t についての恒等式より

$$96k_1-40k_2=0 \quad \cdots ②$$

$$40k_1+96k_2=200 \quad \cdots ③$$

②，③を連立させて解くと

$$k_1=\frac{125}{169},\ k_2=\frac{300}{169}$$

よって，与えられた微分方程式，すなわち①の一般解は

$I=(C_1+C_2t)e^{-10t}+\dfrac{125}{169}\sin 2t+\dfrac{300}{169}\cos 2t$　（C_1，C_2 は任意定数）

である。

このとき

$$\frac{dI}{dt}=(C_2-10C_1-10C_2t)e^{-10t}+\frac{250}{169}\cos 2t-\frac{600}{169}\sin 2t$$

だから，初期条件より

$$C_1+\frac{300}{169}=0 \quad \cdots ④$$

$$C_2-10C_1+\frac{250}{169}=0 \quad \cdots ⑤$$

④，⑤を連立させて解くと

$$C_1=-\frac{300}{169},\ C_2=-\frac{3250}{169}$$

よって，求める解は

$$I=-\frac{300+3250t}{169}e^{-10t}+\frac{125}{169}\sin 2t+\frac{300}{169}\cos 2t$$

（答）$I=-\dfrac{300+3250t}{169}e^{-10t}+\dfrac{125}{169}\sin 2t+\dfrac{300}{169}\cos 2t$