

2021 年度 第 9 回 塩野直道記念「算数数学の自由研究」作品コンクール 応募作品

シムソン線,9点円の一般化とオイラー・ポンスレ点

私立市川中学校 3 年 齋藤 輝

2021 年 8 月 14 日

1 はじめに

この論文は, シムソン線と 9 点円の一般化に関する初等幾何の研究成果をまとめたものである. 僕は昨年度, 第 8 回算数数学の自由研究コンクールにおいて, シムソンの定理の拡張に関する研究を行った. しかし, これには研究対象がシムソン線に限定されているという課題があった. シムソン線は与えられた三角形の外接円上の 1 点からしか引くことができないため, 一般性に欠ける図形であると考え. 本論文では, 外接円上でない点に対しても定義できる垂足円や中点円を導入することでこの課題を解決した.

後半では, オイラー・ポンスレ点と呼ばれる図形を用いて, 四角形にオイラー線と 9 点円を定義する. オイラー・ポンスレ点は, 英語で *Euler-Poncelet Point* と書くが, ネットで検索する際は英語で検索しないとそれに関する情報が得られないなど, 日本ではあまり知られていないものである. 昨年度の研究結果がオイラー・ポンスレ点によって一般化されることを知った僕はそれに興味を持ち, 動的数学ツール GeoGebra を用いて研究を進め, 四角形のオイラー線, 9 点円の定義の着想を得た.

今回の研究の特徴は, 対象とする図形の範囲を広げていくことによって一般化の議論を進めていくという点にある. 一般化の手法を用いることによって, 論文の内容が単なる発見した幾何的性質の羅列ではなく, より体系的で論理的な議論になるように心掛けた. また, 前回と同じく今回の研究も, 定義から証明までのすべてを初等幾何の範囲で行い, 解析幾何的手法を用いるときには見られない初等幾何特有の美しさを重要視した.

本論文を通して, 初等幾何学のさらなる発展に貢献することができれば幸いである.

2 シムソン線の一般化

ここでは, シムソン線を一般化した概念である垂足円を定義し, 与えられた三角形の外接円上にない点からもシムソン線と類似した図形を定義することを考える. これにより, 昨年度の研究で扱ったシムソン線に関する性質を一般化し, より高い視点で見ることができるようになる. なお, 僕は以前の研究で垂足円に似たものについて言及していた. ([1] の p.3 を参照のこと.)

2.1 垂足円

定義 1 垂足円

三角形 ABC と点 D がある. D から 3 直線 AB, BC, CA に下した垂線の足を通る円を D における三角形 ABC の垂足円 (*Pedal Circle*) という.

定義 1 において, D が三角形 ABC の外接円上にあれば垂足円はシムソン線となる. つまり, シムソン線は半径無限大の垂足円と見ることができるのである.

2.2 オイラー・ポンスレ点

[1] の命題 2 においてシムソン線を垂足円に置き換えると, 次のような一般化が得られる. これは本論文の後半で重要な位置を占める.

定理 2 オイラー・ポンスレ点

四角形 $ABCD$ がある。このとき三角形 ABC, BCD, CDA, DAB の 9 点円及び A, B, C, D における三角形 BCD, ACD, ABD, ABC の垂足円は 1 点で交わる。この点を $ABCD$ のオイラー・ポンスレ点 (Euler-Poncelet Point) という。(図 1)

(証明)

AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ E, F, G, H, I, J , 三角形 ABD, ACD の 9 点円の交点を X とする。
 $\angle EXI = \angle EXH + \angle HXI = \angle EJH + \angle HGI = \angle HAE + \angle IAH = \angle IAE = \angle EFI$ より, 4 点 $EIFX$ は共円。
 同様に, 4 点 $GJFX$ も共円である。
 A から BC, CD, DA に下した垂線の足を K, L, M ; B から AC, CD, DA に下した垂線の足を N, O, P ; C から AB, BD, DA に下した垂線の足を Q, R, S ; D から AB, BC, CA に下した垂線の足を T, U, V とすると, 次を得る。
 $\angle TXV = \angle TXH + \angle HXV = \angle TPH + \angle HSV = \angle TPD + \angle BSU = \angle ABD + \angle VCD = (90^\circ + \angle TDB) + (90^\circ + \angle CDV) = (90^\circ + \angle TUB) + (90^\circ + \angle CUV) = \angle TUB + \angle CUD = \angle TUB + \angle BVU = \angle TUV$
 よって, 4 点 $TUVX$ は共円。同様にして, 4 点 $QRSX, NOPX, MLKX$ もそれぞれ共円である。題意は示された。 ■

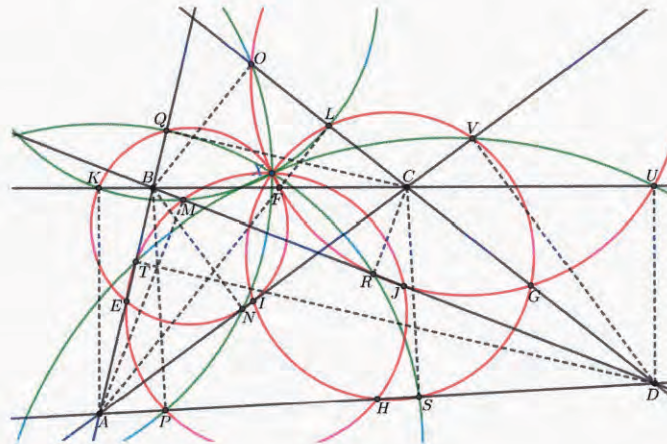


図 1 (定理 2)

3 9 点円の一般化

定義 1 において, D を垂心または外心とすると垂足円は 9 点円となるため, 垂足円はシムソン線だけでなく 9 点円の一般化にもなっていることが分かる。この章の後半では, 9 点円の一般化として垂足円の他に中点円なるものを導入し, オイラー・ポンスレ点と類似した性質を述べる。

3.1 垂足円の一般化

垂足円に関して, 等角共役点に関する性質 (定理 3) が成り立つことが知られている。この性質を抜き出し, 垂足円を更に一般化した。ここでの拡張は, 射影する角度を変えるという [1] の命題 1 に似た手法を用いている。

定理 3

三角形 ABC と互いに等角共役点である 2 点 D, E がある。このとき, D, E から 3 直線 AB, BC, CA に下した垂線の足 6 点は同一円周上にある。(図 2)

定理 4

三角形 ABC と互いに等角共役点である 2 点 D, E がある. このとき, D を 3 直線 AB, BC, CA に対して角度 θ で射影した 3 点と E を AB, BC, CA に対して角度 $-\theta$ で射影した 3 点の合計 6 点は同一円周上にある. (図 3)

(証明)

D を AB, BC, CA に角度 θ で射影した点を P, Q, R ; E を AB, BC, CA に角度 $-\theta$ で射影した点を S, T, U とする.

このとき, 4 点 $ADPR, BDPQ, CDQR, AESU, BEST, CETU$ はすべて共円であるから, 次を得る.

$$\angle PSU = \angle ASU = \angle AEU = \angle EAU + \angle AUE = \angle PAD + \angle DPA = \angle PDA = \angle PRA = \angle PRU$$

よって, 4 点 $PUSR$ は共円. 同様にして, 4 点 $STQP, QRUT$ も共円である. 従って, 6 点 $PQRSTU$ は共円.

特に, $\theta = 90^\circ$ とすると定理 3 を得る. ■

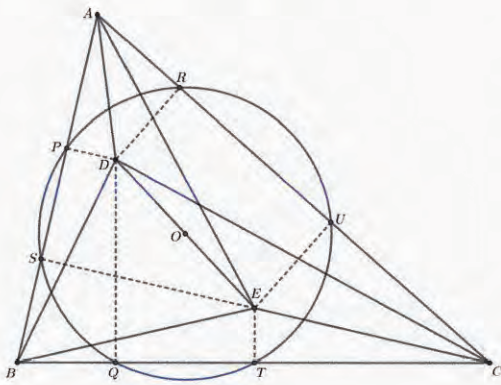


図 2 (定理 3)

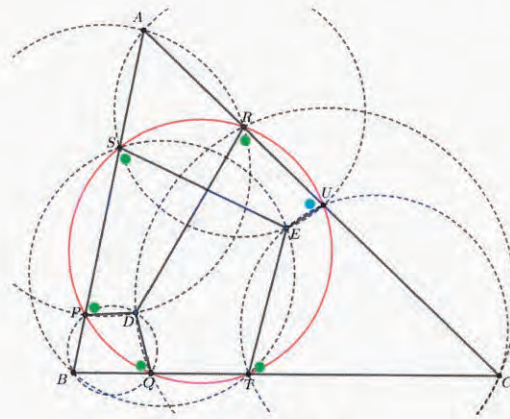


図 3 (定理 4)

3.2 中点円

ここでは, 垂心と各頂点の中点を通るという 9 点円の性質を抜き出し, 中点円なるものを独自に導入する. 中点円は, 同じ 9 点円の一般化という意味で性質が垂足円と類似しており, オイラー・ポンスレ点に似た性質を持つ.

定義 5 中点円

三角形 ABC と点 D がある. このとき, 3 線分 AD, BD, CD の中点を通る円を D における三角形 ABC の中点円 (Midpoint Circle) という.

定義 5 において, D が垂心の時, 中点円は 9 点円となるから, これは 9 点円の一般化といえる.

3.3 疑似外心

定理 6 疑似外心

四角形 $ABCD$ がある. このとき, A, B, C, D における三角形 BCD, ACD, ABD, ABC の中点円は 1 点で交わる. この点を疑似外心 (Pseudocircumcenter) という. また, 疑似外心は $ABCD$ の重心に関してオイラー・ポンスレ点と対称な点である. (図 4)

注意 四角形の重心とは, 4 辺の中点を結んでできる平行四辺形の中心のことを指す.

(証明)

AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ $M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{AD}, M_{AC}, M_{BD}$, 重心を G , オイラー・ポンスレ点を X とする.

ここで, G に関する対称変換を φ とする. このとき, 中点連結定理より簡単に $\varphi(M_{AB}) = M_{CD}, \varphi(M_{BC}) = M_{AD}, \varphi(M_{AC}) = M_{BD}$ が従う. よって, $\varphi(M_{AB}M_{BC}M_{AC}) = M_{CD}M_{AD}M_{BD}$ である.

同様に, $\varphi(M_{BC}M_{CD}M_{BD}) = M_{AD}M_{AB}M_{AC}, \varphi(M_{CD}M_{AD}M_{AC}) = M_{AB}M_{BC}M_{BD}, \varphi(M_{AD}M_{BD}M_{AB}) = M_{BC}M_{AC}M_{CD}$ であるから, 4 円 $M_{CD}M_{AD}M_{BD}, M_{AD}M_{AB}M_{AC}, M_{AB}M_{BC}M_{BD}, M_{BC}M_{AC}M_{CD}$ は 1 点で交わり, 交点は $\varphi(X)$ である. 従って, 題意は示された. ■

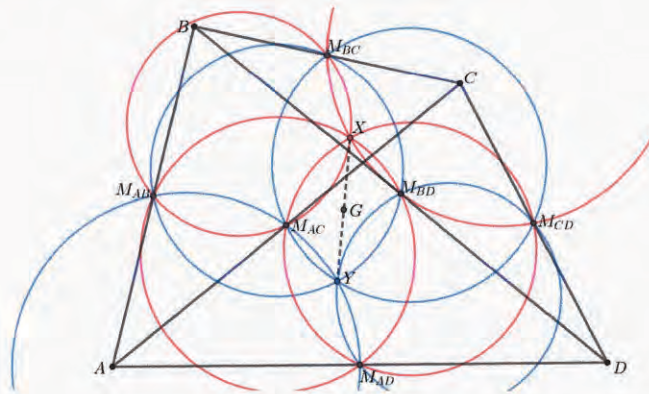


図 4 (定理 6)

定理 6 において, $ABCD$ が円に内接するとき, 疑似外心は外心に一致する. つまり, 円に内接する四角形において, オイラー・ポンスレ点は重心に関して外心と対称な点なのである. そのため, 円に内接する四角形のオイラー・ポンスレ点を反中心 (Anticenter) ということもある. (疑似外心, 反中心に関する詳しい記述は [2],[6] を参照)

また, 定理 6 は定理 2 において垂足円を中点円に置き換えたものと見ることができ, オイラー・ポンスレ点と類似した定理であることが分かる.

4 四角形に対するシムソン線・垂足円

これまでの議論では, シムソン線や垂足円は三角形に対して引くことができるものとしてきた. しかし, これらは工夫することによって四角形に対しても定義することができる.

4.1 四角形へのシムソン線

定理 7 四角形のシムソン線

共円四角形 $ABCD$ とその外接円上に点 E がある. このとき, E における三角形 ABC, BCD, CDA, DAB のシムソン線 4 本に E から下した垂線の足は同一直線上にある. この 4 点を通る直線を E における四角形 $ABCD$ のシムソン線とする. (図 5)

(証明)

E から AB, BC, CD, DA, AC, BD に下した垂線の足をそれぞれ $P_{1,2,3,4,5,6}$ とする.

$\angle AP_1E = \angle AP_4E = \angle AP_5E = 90^\circ, \angle DP_3E = \angle DP_4E = \angle DP_6E = 90^\circ$ より, 4 点 $P_1P_4P_5E, P_3P_4P_6E$ は共円.

よって, E は完全四角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ のミケル点である. ここで, 三角形 $P_1P_4P_5, P_1P_2P_6, P_3P_4P_6, P_3P_2P_5$ とミケル点 E にシムソンの定理を用いれば主張を得る. ■

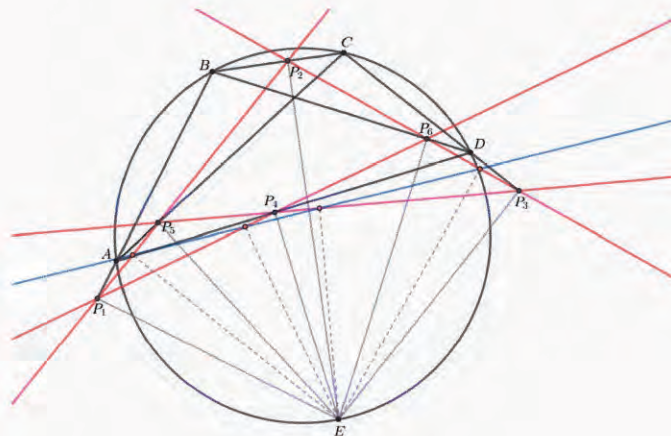


図 5 (定理 7)

4.2 四角形への垂足円

ここでは、4.1 を一般化して外接円上にない点からもシムソン線と類似した図形、つまり垂足円を定義することを考える。

補題 8

四角形 $ABCD$ と点 E がある。このとき、 E における三角形 ABC, BCD, CDA, DAB の垂足円は 1 点で交わる。(図 6)

(証明)

E から AB, BC, CD, DA, AC, BD に下した垂線の足をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とし、垂足円 PTQ, QRU の交点を X とする。

このとき、5 点 $AEPST, BEPQU, CEQRT, DERSU$ はそれぞれ共円である。

よって、 $\angle TXR = \angle TXQ + \angle QXR = \angle TXQ + \angle QUR = \angle TPQ + \angle QUB + \angle DUR = \angle TPQ + \angle QPB + \angle DSR = \angle TPA + \angle DSR = \angle TSA + \angle DSR = \angle TSR$ より、4 点 $RTSX$ は共円。

同様に、4 点 $PUSX$ の共円も示される。従って、題意は示された。 ■

命題 9 四角形の垂足円

四角形 $ABCD$ と点 E がある。このとき、 E を三角形 ABC, BCD, CDA, DAB の E における垂足円で反転した 4 点は同一円周上にある。また、この 4 点を通る円は E における四角形 ABC, BCD, CDA, DAB の垂足円の交点を通る。この円を E における四角形 $ABCD$ の垂足円とする。(図 7)

(未証明)

この命題は、現在の僕の技能では初等幾何学的に証明することができなかった。なお、命題が正しいことは動的数学ツール GeoGebra で確認済みである。

ここで注目すべき点は、円に対する垂線の足の定義である。定理 8 では点 E から 4 本のシムソン線に垂線を下したが、命題 11 では、このシムソン線が垂足円に変化する。従って、円に対する垂線の足という一見定義不可能であるような概念を定義する必要があるのである。ここでは、命題 11 のように反転を用いて定義するのが最も自然であると結論づけた。



図 6 (補題 8)

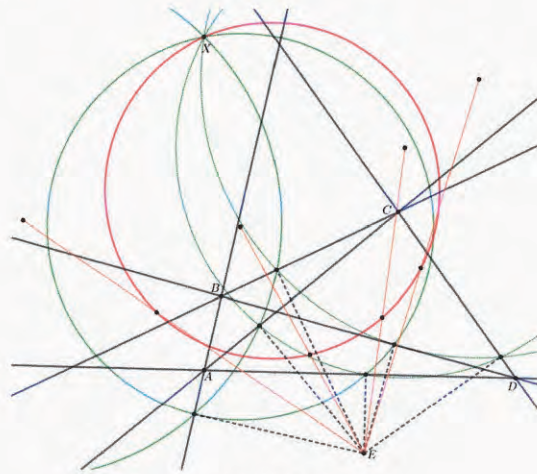


図 7 (命題 9)

5 四角形のオイラー線と 9 点円

この章では、オイラー・ポンスレ点を用いて本来三角形にのみ定義される図形であったオイラー線と 9 点円を四角形に対しても定義する。オイラー線を定義する過程は、三角形の五心の四角形への拡張と見ることができ、オイラー・ポンスレ点とそれに関わることはとても興味深い結果である。

5.1 四角形のオイラー線

四角形に対し、4 頂点のうち 3 点を選んでできる 4 つの三角形の (重心, 外心, 垂心, 9 点円中心) が作る四角形をそれぞれ (重心, 外心, 垂心, 9 点円中心) 四角形と呼ぶことにする。四角形の (重心, 外心, 垂心, 9 点円中心) 四角形のオイラー・ポンスレ点について考察する。

命題 10 重心四角形のオイラー・ポンスレ点

四角形 $ABCD$ があり、疑似外心を O , オイラー・ポンスレ点を X とする。このとき、 $ABCD$ の重心四角形のオイラー・ポンスレ点 X_G は $\overrightarrow{OX} = 3\overrightarrow{OX_G}$ を満たす。(図 8)

命題 11 外心四角形のオイラー・ポンスレ点

四角形 $ABCD$ があり、疑似外心を O とする。このとき、 $ABCD$ の外心四角形のオイラー・ポンスレ点 X_O は O と一致する。(図 9)

命題 12 垂心四角形のオイラー・ポンスレ点

四角形 $ABCD$ があり、オイラー・ポンスレ点を X とする。このとき、 $ABCD$ の垂心四角形のオイラー・ポンスレ点 X_H は X と一致する。(図 10)

命題 13 9 点円中心四角形のオイラー・ポンスレ点

四角形 $ABCD$ があり、重心を G とする。このとき、 $ABCD$ の 9 点円中心四角形のオイラー・ポンスレ点 X_N は G と一致する。(図 11)

注意 命題 10~13 については、紙面の都合上証明は割愛する。なお、命題が正しいことは動的数学ツール GeoGebra で確認済みである。

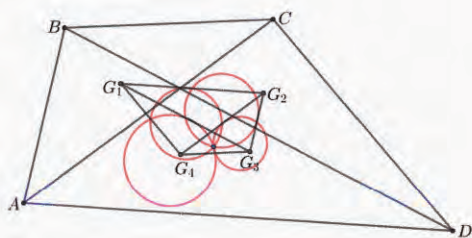


図 8 (命題 10)

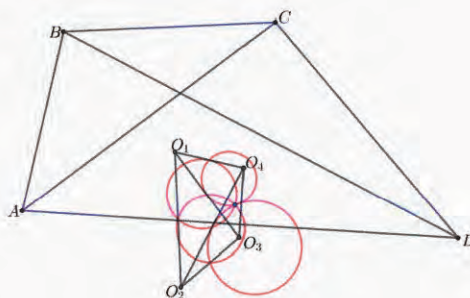


図 9 (命題 11)

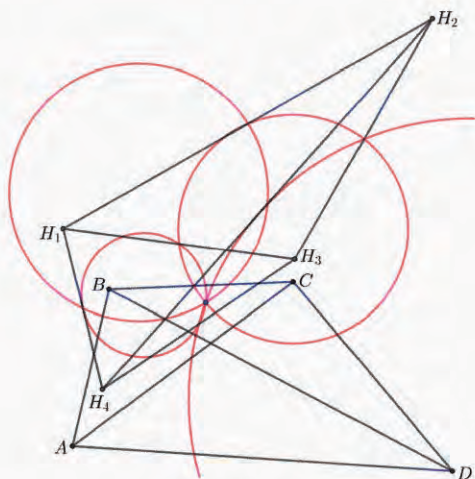


図 10 (命題 12)

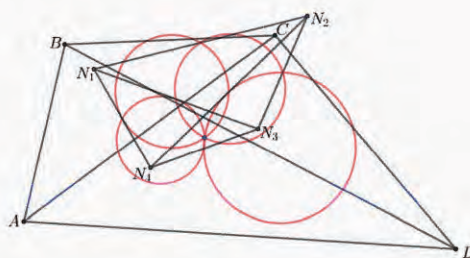


図 11 (命題 13)

ここで、命題 10~13 の主張をまとめると、 $\overrightarrow{X_O X_H} = 3\overrightarrow{X_O X_G} = 2\overrightarrow{X_O X_N}$ を得る。これは、三角形の場合に $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{ON}$ が成り立ったことと酷似している。従って、四角形のオイラー線を次のように定義できる

定義 14 四角形のオイラー線

命題 10~13 において 4 点 X_O, X_G, X_N, X_H を通る直線を四角形 $ABCD$ のオイラー線とする。(図 12)

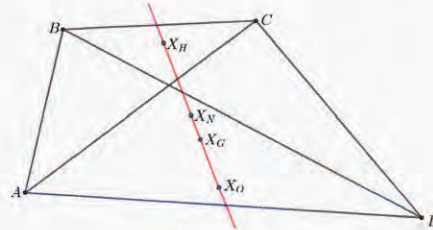


図 12 (定義 14)

5.2 円に内接する四角形の 9 点円

ここでは、円に内接する四角形に 9 点円を定義する。ここで定義された 9 点円の中心は命題 13 における X_N と一致しており、5.1 との整合性も確認できる。また、円に内接する五角形の 5 頂点のうち 4 点を選んでできる四角形の 9 点円に関して、オイラー・ポンスレ点の拡張ともいえる定理が成り立つなど、三角形の場合の 9 点円の性質に類似した性質を持つ。

定義 15 四角形の 9 点円

円に内接する四角形 $ABCD$ があり、垂心四角形のオイラー・ポンスレ点を X_H とする。このとき、4 線分 AX_H, BX_H, CX_H, DX_H の中点を通る円を四角形 $ABCD$ の 9 点円とする。(図 13)

注意 三角形の場合と異なり、四角形の 9 点円は辺と交点を持つとは限らない。

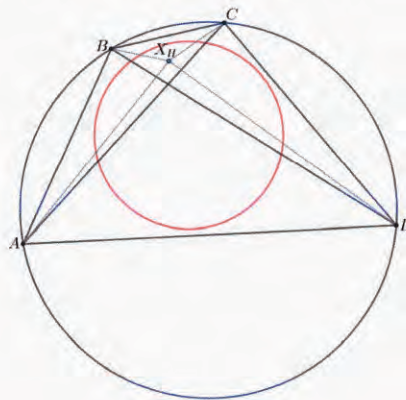


図 13 (定義 15)

系 16

円に内接する四角形 $ABCD$ があり、9 点円中心四角形のオイラー・ポンスレ点を X_N とする。このとき、 $ABCD$ の 9 点円中心は X_N に一致する。

(証明)

$ABCD$ の 9 点円は、外接円をオイラー・ポンスレ点を中心に $1/2$ 倍に縮小したものであるから、命題 13 よりよい。 ■

定理 17

円に内接する五角形 $ABCDE$ がある. このとき, 四角形 $ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC$ の 9 点円全てに内接する円が存在する. (図 14)

(証明)

$ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC$ の重心をそれぞれ $G_{1,2,3,4,5}$ とする. 5 点 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 は共円であり, この 5 点を通る円が共通内接円であることを示す.

AC, CE, EB, BD, DA の中点をそれぞれ F, G, H, I, J とすると, 中点連結定理より以下を得る.

$$G_1G_2 \parallel FG \parallel EA, G_2G_3 \parallel IJ \parallel AB, G_3G_4 \parallel GH \parallel BC, G_4G_5 \parallel JF \parallel CD, G_5G_1 \parallel HI \parallel DE$$

$$4G_1G_2 = EA, 4G_2G_3 = AB, 4G_3G_4 = BC, 4G_4G_5 = CD, 4G_5G_1 = DE$$

よって, $G_2G_3G_4G_5G_1 \sim ABCDE$ であり, 特に 5 点 $G_1G_2G_3G_4G_5$ は共円である.

次に, 円 $G_1G_2G_3G_4G_5$ が 5 つの 9 点円に内接することを示す. $G_2G_3G_4G_5G_1$ と $ABCDE$ の相似比は 1:4 であるから, 円 $G_1G_2G_3G_4G_5$ の直径は $ABCDE$ の外接円の半径の 1/2 である. 一方, $ABCD$ の 9 点円の半径は $ABCDE$ の外接円の半径の 1/2 である.

従って, $ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC$ の 9 点円中心はそれぞれ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 であることから, 主張を得る. ■

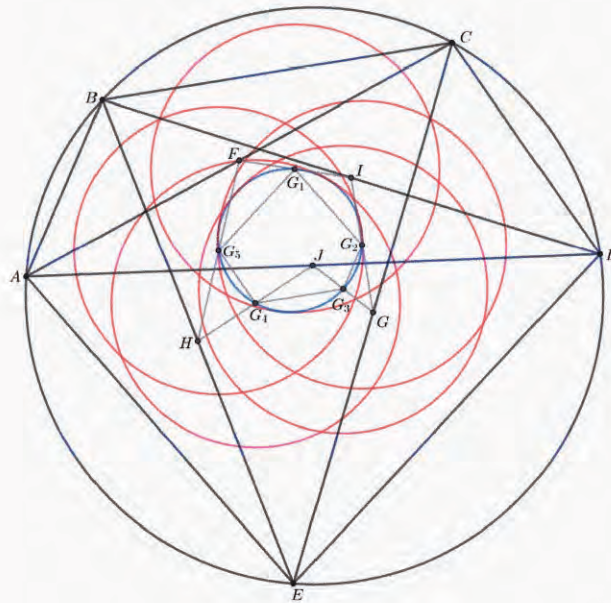


図 14 (定理 17)

定理 2 において, オイラーポンスレ点を中心とする半径 0 の円が 4 つの 9 点円に内接しているとみれば, 定理 17 はオイラーポンスレ点の拡張といえることができる.

6 おわりに

6.1 今後の研究課題

今回の研究を終えて、新たに思いついた今後の研究課題を挙げる。

シュタイナー線

昨年度の研究 [1] ではシムソン線の 2 倍拡大であるシュタイナー線を扱ったが、僕はこのシュタイナー線についても本論文で行ったような一般化ができるのではないかと考えている。また、シュタイナー線は外接円上の点を動かしたとき定点（三角形の垂心）を通るという性質を持っており、この性質が四角形に拡張した後ではどのようなものかはとても興味深い。

四角形の 9 点円

本論文では、円に内接する四角形のみしか 9 点円を定義できなかった。今後は円に内接しない三角形に対しても 9 点円を定義する研究を進めていきたい。

解析幾何的手法の導入

今回の研究は、座標計算などの解析幾何の手法は用いず、全て初等幾何の範囲で行った。しかし、シムソンの定理は複素平面を用いても証明できる。解析幾何的手法を導入したときシムソン線がどのような代数的な性質を持つのかを調べ、代数的な特徴に注目した一般化を試みたい。

6.2 今回の研究の感想

シムソンの定理の拡張に関する研究を続けて約 1 年が経ったが、中 2 の僕と現在の僕を比べて、研究の質や研究に関するものの見方について大きな変化を感じている。

まず 1 つ目は、性質の発見がよりスムーズに行えるようになってきたことである。昨年度は、GeoGebra で性質を見つけることが非常に大変だったが、研究を進めるうちに見通しの立て方に慣れ、性質を発見しやすくなってきた。

2 つ目は、一般化や拡張などの考え方が身に付いてきたことである。最近僕は、群論をはじめとした代数学と位相空間論について勉強している。その過程で、「成り立つ性質を抜き出し、より抽象化した概念を定義する」という現代数学特有の考え方に慣れ、それが今回のシムソン線の一般化をテーマとした研究に至ったと考える。

そして 3 つ目は、数学の論文の書き方を習得したことである。前回の研究で初等幾何の一般にはあまり知られていない領域に興味をもった僕は、Forum Geometricorum と呼ばれるユークリッド幾何を専門とした論文誌の論文などを読んでみた。そこで数学の論文がどのように書かれているかを理解し、まず [3] で $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ の使い方を学び、自分のレポートを本格的な数学の論文に近い形式にするとともに、論文の構成がより体系的で論理的になるようにした。

今回の論文作成の経験を生かし、これからもシムソン線に関する研究を進めるとともに、競技数学や現代数学など、その他の数学の勉強にも全力を注いでいきたい。

6.3 参照

- [1] 齋藤 輝 (2020) 『Simson の定理の拡張』 第 8 回 算数数学の自由研究コンクール 入賞作品
<https://www.rimse.or.jp/research/past/pdf/8th/work14.pdf>
- [2] Michal Rolinek and Le Anh Dung(2014) *The Miquel Points, Pseudocircumcenter, and Euler-Poncelet Point of a Complete Quadrilateral* Forum Geometricorum Vol.14 pp.145-153
<https://forumgeom.fau.edu/FG2014volume14/FG201413.pdf>
- [3] 奥村晴彦/黒木祐介 『 $\text{L}_\text{A}_\text{T}_\text{E}_\text{X} 2_\epsilon$ 美文書作成入門』 第 8 版 技術評論社 (2020.11.27 発行)
- [4] Evan Chen *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad* MAA PRESS (2016.12.22 発行)
- [5] Victor Rong *A Few Configurations* Canada IMO training 2020 winter camp
<https://sites.google.com/site/imocanada/2020-winter-camp>
- [6] Wolfram Math World *Anticenter* (2021.7.24 最終確認)
<https://mathworld.wolfram.com/Anticenter.html>