

$\tan N^\circ$ および $\cos N^\circ$ は有理数か

一ツ葉高等学校 数学科教諭

大津光司

概要

本稿では、0 以上 360 未満の整数 N において、 $\tan N^\circ$ および $\cos N^\circ$ が有理数か否かを調べた。その結果、 $\tan N^\circ$ が有理数となるのは

$$N = 0, 45, 135, 180, 225, 315$$

の場合に限られ、また $\cos N^\circ$ が有理数となるのは

$$N = 0, 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300$$

の場合に限られる。さらに、これら以外の整数 N に対しては、 $\tan N^\circ$ および $\cos N^\circ$ はいずれも無理数であることを証明した。議論は高等学校数学の範囲に基づいて行う。

キーワード：「無理数」、「三角関数」、「高校数学」

1 はじめに

「 $\tan 1^\circ$ は有理数か (2006 年京都大学後期)」この問題はたいへんよく知られている。以前、日本数学検定協会の公式ホームページ『算数・数学教員のための情報サイト (SAME)』に寄稿した「 $\sin N^\circ$ は有理数か」(参考文献 [1]) では、「 $\sin 1^\circ$ は有理数か」という問いを一般の角 N° に拡張し、 $\sin N^\circ$ が有理数となる場合を分類した。その過程で、同様の考え方が $\cos N^\circ$ や $\tan N^\circ$ に対しても適用可能であり、高校数学の範囲で有理数か無理数かの判定ができることを指摘した。本稿ではこの方針に基づき、0 以上 360 未満の整数 N に対する $\tan N^\circ$ および $\cos N^\circ$ について調べる。有理数でない実数を無理数というが、結論として、これらの三角関数の値はごく限られた場合を除いて無理数となることがわかる。

2 $\tan N^\circ$ について

2.1 $\tan N^\circ$ が有理数となる場合

$N = 0, 45, 135, 180, 225, 315$ のとき、 $\tan N^\circ$ が有理数となることはよく知られている。

N	0	45	135	180	225	315
$\tan N^\circ$	0	1	-1	0	1	-1

2.2 調べるべき N の範囲

次の関係式から 1 以上 90 未満の整数 N について調べれば十分である。

$$\tan N^\circ = -\tan(180 - N)^\circ = \tan(180 + N)^\circ = -\tan(360 - N)^\circ$$

さらに、次の関係式から 1 以上 45 未満の整数 N について調べれば十分である。

$$\tan N^\circ = \frac{1}{\tan(90 - N)^\circ}$$

2.3 $\tan 1^\circ$ が無理数であることの証明

2 倍角の公式、3 倍角の公式および 5 倍角の公式を用いて $\tan 1^\circ$ が無理数であることを証明する。

命題 2.1 $\tan 2\theta$ が無理数ならば $\tan \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。2 倍角の公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ より、 $\tan \theta$ が有理数ならば $\tan 2\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

命題 2.2 $\tan 3\theta$ が無理数ならば $\tan \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。3 倍角の公式 $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$ より、 $\tan \theta$ が有理数ならば $\tan 3\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

命題 2.3 $\tan 5\theta$ が無理数ならば $\tan \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。5 倍角の公式 $\tan 5\theta = \frac{5 \tan \theta - 10 \tan^3 \theta + \tan^5 \theta}{1 - 10 \tan^2 \theta + 5 \tan^4 \theta}$ より、 $\tan \theta$ が有理数ならば $\tan 5\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

命題 2.4 $\tan 1^\circ$ は無理数である。

証明 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ は無理数であることから、**命題 2.1**、**命題 2.2** および **命題 2.3** より $\tan 1^\circ$ が無理数であることがわかる。 ■

これらの命題により、次の値が無理数であることがわかる。

- $\tan 30^\circ$ は無理数であるので、 $\tan 1^\circ$ 、 $\tan 2^\circ$ 、 $\tan 3^\circ$ 、 $\tan 5^\circ$ 、 $\tan 6^\circ$ 、 $\tan 10^\circ$ 、 $\tan 15^\circ$ は無理数である。
- $\tan 190^\circ (= \tan 10^\circ)$ は無理数であるので、 $\tan 19^\circ$ は無理数である。
- $\tan 174^\circ (= -\tan 6^\circ)$ は無理数であるので、 $\tan 29^\circ$ は無理数である。
- $\tan 60^\circ$ は無理数であるので、 $\tan 4^\circ$ 、 $\tan 12^\circ$ 、 $\tan 20^\circ$ は無理数である。

証明 $\tan 27^\circ \neq \pm 1$ かつ $\tan(5 \times 27)^\circ = \tan 135^\circ = -1$ より、**命題 2.8**から $\tan 27^\circ$ は無理数である。 ■

2.5 $\tan 18^\circ$ が無理数であることの証明

命題 2.10 $\tan 18^\circ$ は無理数である。

証明 $\theta = 18^\circ$ とする。 $5\theta = 90^\circ$ より $3\theta = 90^\circ - 2\theta$ であるので、 $1 - 2\sin^2 \theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ より

$$(\sin \theta - 1)(4\sin^2 \theta + 2\sin \theta - 1) = 0$$

を得る。 $0 < \sin \theta < 1$ より、 $\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

従って、 $\tan^2 \theta$ が無理数となることから $\tan 18^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

系 2.11 $\tan 36^\circ$ は無理数である。

証明 $\tan 72^\circ = \frac{1}{\tan 18^\circ}$ は無理数であるので、 **命題 2.1**より $\tan 36^\circ$ は無理数となることがわかる。 ■

2.6 $30 < N < 36$ の場合

命題 2.12 $30 < N < 36$ を満たす整数 N において、 $\tan N^\circ$ は無理数である。

証明 $30 < N < 36$ のとき、 $0 < 180 - 5N < 30$ より $\tan 5N^\circ = -\tan(180 - 5N)^\circ$ は無理数である。 **命題 2.3**より、 $\tan N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

2.7 $36 < N \leq 43$ の場合

命題 2.13 $36 < N \leq 43$ を満たす整数 N において、 $\tan N^\circ$ は無理数である。

証明 $36 < N \leq 43$ のとき、 $0 < 5N - 180 \leq 35$ より $\tan 5N^\circ = \tan(5N - 180)^\circ$ は無理数である。 **命題 2.3**より、 $\tan N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

2.8 $\tan N^\circ$ に関する結論

以上の議論により、次の定理が成立する。

定理 2.14 0 以上 360 未満の整数 N (ただし $N \neq 90, 270$) に対し、 $\tan N^\circ$ が有理数となるのは $N = 0, 45, 135, 180, 225, 315$ のときに限る。

3 $\cos N^\circ$ について

3.1 $\cos N^\circ$ が有理数となる場合

$N = 0, 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300$ のとき、 $\cos N^\circ$ が有理数となることはよく知られている。

N	0	60	90	120	180	240	270	300
$\cos N^\circ$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

3.2 調べるべき N の範囲

次の関係式から 1 以上 90 未満の整数 N について調べれば十分である。

$$\cos N^\circ = -\cos(180 - N)^\circ = -\cos(180 + N)^\circ = \cos(360 - N)^\circ$$

3.3 $\cos 1^\circ$ が無理数であることの証明

3 倍角の公式および 5 倍角の公式を用いて $\cos 1^\circ$ が無理数であることを証明する。

命題 3.1 $\cos 3\theta$ が無理数ならば $\cos \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ より、 $\cos \theta$ が有理数ならば $\cos 3\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

命題 3.2 $\cos 5\theta$ が無理数ならば $\cos \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。5 倍角の公式 $\cos 5\theta = 5\cos \theta - 20\cos^3 \theta + 16\cos^5 \theta$ より、 $\cos \theta$ が有理数ならば $\cos 5\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

命題 3.3 $\cos 1^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数であることから、**命題 3.1** および **命題 3.2** より $\cos 1^\circ$ が無理数であることがわかる。 ■

これらの命題により、次の値が無理数であることがわかる。

- $\cos 45^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 1^\circ, \cos 3^\circ, \cos 5^\circ, \cos 9^\circ, \cos 15^\circ$ は無理数である。

また、次の命題も成り立つ。

命題 3.4 $\cos 2\theta$ が無理数ならば $\cos \theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。2倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ より、 $\cos \theta$ が有理数ならば $\cos 2\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

- $\cos 30^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 2^\circ$ 、 $\cos 6^\circ$ 、 $\cos 10^\circ$ は無理数である。
- $\cos 135^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 27^\circ$ は無理数である。
- $\cos 150^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 25^\circ$ 、 $\cos 50^\circ$ 、 $\cos 75^\circ$ は無理数である。
- $\cos 130^\circ (= -\cos 50^\circ)$ は無理数であるので、 $\cos 26^\circ$ は無理数である。
- $\cos 210^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 14^\circ$ 、 $\cos 21^\circ$ 、 $\cos 70^\circ$ は無理数である。
- $\cos 110^\circ (= -\cos 70^\circ)$ は無理数であるので、 $\cos 22^\circ$ は無理数である。

3.4 $\cos 4^\circ$ が無理数であることの証明

命題 3.5 $\cos \theta$ が $\cos \theta \neq \pm \frac{1}{2}$ かつ $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ は無理数である。

証明 3倍角の公式から次の等式がえられる。

$$8\cos^3 \theta - 6\cos \theta - 1 = 0$$

ここで、 $\cos \theta$ は $8x^3 - 6x - 1 = 0$ の解のひとつである。命題 2.5より、この方程式に有理数解があるとすると、 $x = \pm \frac{1}{2}$ 、 $\pm \frac{1}{4}$ 、 $\pm \frac{1}{8}$ であるが、いずれも解とはならないことから、 $\cos \theta$ は無理数であることがわかる。 ■

系 3.6 $\cos 20^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos 60^\circ < \cos 20^\circ < \cos 0^\circ$ より、 $\cos 20^\circ \neq \pm \frac{1}{2}$ であり、 $\cos(3 \times 20^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ である。命題 3.5より、 $\cos 20^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

- $\cos 20^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 4^\circ$ は無理数である。
- $\cos 160^\circ (= -\cos 20^\circ)$ は無理数であるので、 $\cos 16^\circ$ は無理数である。

命題 3.7 $\cos \theta$ が $\cos \theta \neq \pm \frac{1}{2}$ かつ $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ は無理数である。

証明 命題 3.5と同様。 ■

系 3.8 $\cos 40^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos 60^\circ < \cos 40^\circ < \cos 0^\circ$ より、 $\cos 40^\circ \neq \pm \frac{1}{2}$ であり、 $\cos(3 \times 40^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ である。命題 3.7より、 $\cos 40^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

- $\cos 40^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 8^\circ$ は無理数である。

- $\cos 140^\circ (= -\cos 40^\circ)$ は無理数であるので、 $\cos 28^\circ$ は無理数である。

命題 3.9 $\cos \theta$ が $\cos \theta \neq \pm \frac{1}{2}$ かつ $\cos 5\theta = -\frac{1}{2}$ のとき、 $\cos \theta$ は無理数である。

証明 5倍角の公式から次の等式がえられる。

$$32 \cos^5 \theta - 40 \cos^3 \theta + 10 \cos \theta + 1 = 0$$

ここで、 $\cos \theta$ は $32x^5 - 40x^3 + 10x + 1 = 0$ の解のひとつである。命題 2.5 より、この方程式に有理数解があるとすると、 $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{16}, \pm \frac{1}{32}$ であるが、いずれも解とはならないことから、 $\cos \theta$ は無理数であることがわかる。 ■

系 3.10 $\cos 24^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos 60^\circ < \cos 24^\circ < \cos 0^\circ$ より、 $\cos 24^\circ \neq \pm \frac{1}{2}$ であり、 $\cos(5 \times 24)^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ である。命題 3.9 より、 $\cos 24^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

- $\cos 24^\circ$ は無理数であるので、 $\cos 12^\circ$ は無理数である。

3.5 N が 7 以上の素数の場合

$\sin(2n-1)\theta = (\text{整数}) \times (\sin \theta \text{ の奇数乗})$ の和、 $\cos(2n-1)\theta = (\text{整数}) \times (\cos \theta \text{ の奇数乗})$ の和の形で表示できることを示す。

命題 3.11 n を自然数とするとき、次のように表示できる。ただし a_k, b_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) は整数。

$$\begin{aligned} \sin(2n-1)\theta &= \sum_{k=1}^n a_k \sin^{2k-1} \theta \\ \cos(2n-1)\theta &= \sum_{k=1}^n b_k \cos^{2k-1} \theta \end{aligned}$$

証明 $n = 1$ のとき、 $\sin(2n-1)\theta = \sin \theta$ 、 $\cos(2n-1)\theta = \cos \theta$ より、成立する。

$n = k$ まで成立すると仮定し、 $n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \sin(2n-1)\theta &= \sin(2k+1)\theta \\ &= \sin(2k-1)\theta \cos 2\theta + \cos(2k-1)\theta \sin 2\theta \\ &= \sin(2k-1)\theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta \cos(2k-1)\theta \cos \theta \end{aligned}$$

ここで、仮定より、

$$\begin{aligned}\sin(2k-1)\theta &= \sum_{l=1}^n c_l \sin^{2l-1}\theta \\ \cos(2k-1)\theta &= \sum_{l=1}^n d_l \cos^{2l-1}\theta\end{aligned}$$

と表示できる。ただし、各 c_l 、 d_l は整数。したがって

$$\sin(2n-1)\theta = \sum_{l=1}^n c_l \sin^{2l-1}\theta - 2 \sum_{l=1}^n c_l \sin^{2l+1}\theta + 2 \sum_{l=1}^n d_l \sin\theta (1 - \sin^2\theta)^l$$

となる。また二項定理より

$$\sin(2n-1)\theta = \sum_{l=1}^n c_l \sin^{2l-1}\theta - 2 \sum_{l=1}^n c_l \sin^{2l+1}\theta + 2 \sum_{l=1}^n d_l \left(\sum_{m=0}^l (-1)^m {}_l C_m \sin^{2m+1}\theta \right)$$

となり、各項 (整数) \times ($\sin\theta$ の奇数乗) であり、 $\sin(2n-1)\theta$ がそれらの和の形で表示されることがわかる。また

$$\begin{aligned}\cos(2n-1)\theta &= \cos(2k+1)\theta \\ &= \cos(2k-1)\theta \cos 2\theta - \sin(2k-1)\theta \sin 2\theta \\ &= \cos(2k-1)\theta (2\cos^2\theta - 1) - 2\sin\theta \sin(2k-1)\theta \cos\theta \\ &= 2 \sum_{l=1}^n d_l \cos^{2l+1}\theta - \sum_{l=1}^n d_l \cos^{2l-1}\theta - 2 \sum_{l=1}^n c_l (1 - \cos^2\theta)^l \cos\theta\end{aligned}$$

となる。また二項定理より

$$\cos(2n-1)\theta = 2 \sum_{l=1}^n d_l \cos^{2l+1}\theta - \sum_{l=1}^n d_l \cos^{2l-1}\theta - 2 \sum_{l=1}^n c_l \left(\sum_{m=0}^l (-1)^m {}_l C_m \cos^{2m+1}\theta \right)$$

となり、各項 (整数) \times ($\cos\theta$ の奇数乗) であり、 $\cos(2n-1)\theta$ がそれらの和の形で表示されることがわかる。以上より、すべての自然数 n について成立することがわかる。 ■

系 3.12 n を自然数とするとき、 $\cos(2n-1)\theta$ が無理数ならば $\cos\theta$ は無理数である。

証明 対偶が真であることを示せばよい。命題 3.11 より、整数 b_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) を用いて

$$\cos(2n-1)\theta = \sum_{k=1}^n b_k \cos^{2k-1}\theta$$

と表示できるので、 $\cos\theta$ が有理数ならば $\cos(2n-1)\theta$ は有理数となることがわかる。 ■

3.6 $\cos p^\circ$ の無理数性の証明

命題 3.13 p を 7 以上 89 以下の素数とする。このとき $\cos p^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos p^\circ$ が有理数であると仮定する。このとき**命題 3.11**より、正の奇数 x に対し $\cos px^\circ$ は有理数となる。ここでもし $px + 360y = 45$ を満たす正の奇数 x と、整数 y が存在したとすると、

$$\cos px^\circ = \cos(45 - 360y)^\circ = \cos 45^\circ$$

となり $\cos 45^\circ$ が無理数であることに矛盾するため、 $\cos p^\circ$ が無理数であることが示される。従って、 $px + 360y = 45$ を満たす正の奇数 x と、整数 y が存在することを示せばよい。[1] より、

7 以上 89 以下の素数 p	正の奇数 x	整数 y	7 以上 89 以下の素数 p	正の奇数 x	整数 y
7	315	-6	43	135	-16
11	135	-4	47	315	-41
13	225	-8	53	225	-33
17	45	-2	59	135	-22
19	135	-7	61	225	-38
23	315	-20	67	135	-25
29	225	-18	71	315	-62
31	315	-27	73	45	-9
37	225	-23	79	315	-69
41	45	-5	83	135	-31
			89	45	-11

条件を満たす x, y の組が存在することがわかる。 ■

3.7 $\cos 18^\circ$ および $\cos 36^\circ$ が無理数であることの証明

命題 2.10の証明で $\cos^2 18^\circ$ の値を求めている。これを用いると次がわかる。

系 3.14 $\cos 18^\circ$ および $\cos 36^\circ$ は無理数である。

証明 $\cos^2 18^\circ = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ は無理数であることから、 $\cos 18^\circ$ は無理数であることがわかる。また $\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ より、 $\cos 36^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

3.8 $30 < N < 36$ の場合

命題 3.15 $30 < N < 36$ を満たす整数 N において、 $\cos N^\circ$ は無理数である。

証明 $30 < N < 36$ のとき、 $0 < 180 - 5N < 30$ より $\cos 5N^\circ = -\cos(180 - 5N)^\circ$ は無理数である。命題 3.2より、 $\cos N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

3.9 $36 < N \leq 44$ の場合

命題 3.16 $36 < N \leq 43$ を満たす整数 N において、 $\cos N^\circ$ は無理数である。

証明 $36 < N \leq 43$ のとき、 $0 < 5N - 180 \leq 35$ より $\cos 5N^\circ = -\cos(5N - 180)^\circ$ は無理数である。命題 3.2より、 $\cos N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

- $\cos 220^\circ (= -\cos 40^\circ)$ は無理数であるので、 $\cos 44^\circ$ は無理数である。

3.10 $45 < N < 60$ の場合

命題 3.17 $45 < N < 60$ を満たす整数 N において、 $\cos N^\circ$ は無理数である。

証明 $45 < N < 60$ のとき、 $0 < 180 - 3N < 45$ より $\cos 3N^\circ = -\cos(180 - 3N)^\circ$ は無理数である。命題 3.1より、 $\cos N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

3.11 $60 < N < 75$ の場合

命題 3.18 $60 < N < 75$ を満たす整数 N において、 $\cos N^\circ$ は無理数である。

証明 $60 < N < 75$ のとき、 $0 < 3N - 180 < 45$ より $\cos 3N^\circ = -\cos(3N - 180)^\circ$ は無理数である。命題 3.1より、 $\cos N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

3.12 $75 < N < 90$ の場合

命題 3.19 $75 < N < 90$ を満たす整数 N において、 $\cos N^\circ$ は無理数である。

証明 $75 < N < 90$ のとき、 $0 < 180 - 2N < 30$ より $\cos 2N^\circ = -\cos(180 - 2N)^\circ$ は無理数である。命題 3.4より、 $\cos N^\circ$ は無理数であることがわかる。 ■

3.13 $\cos N^\circ$ に関する結論

以上の議論により、次の定理が成立する。

定理 3.20 0 以上 360 未満の整数 N に対し、 $\cos N^\circ$ が有理数となるのは $N = 0, 60, 90, 120, 180, 240, 270, 300$ のときに限る。

4 さいごに

本稿では、0 以上 360 未満の整数 N における $\tan N^\circ$ および $\cos N^\circ$ の値が有理数となる場合を完全に分類し、それ以外の場合には無理数となることを示した。高校数学の範囲に基づいた初等的議論で結論に到達できる点が本稿の特徴である。本稿の内容が、三角関数を扱う際の発展的課題として、数の性質への関心を喚起する一助となれば幸いである。

参考文献

- [1] 大津光司 . SAME (2023) 「 $\sin N^\circ$ は有理数か」<https://same.su-gaku.net/sinn-rational-number> (2026.1.1)