「多角形の角」の求め方の多様性

（公財）日本数学検定協会
学習数学研究所
穂積　悠樹

要約
　数検３級と４級の１次：計算技能検定では、中学校第２学年（以下、中２と表記する）で学習する「多角形の角」に関する問題を１問ずつ出題してきた。「多角形の角」の問題は、具体的に『正〇角形の１つの内角の大きさは何度ですか。』『正〇角形の１つの外角の大きさは何度ですか。』『〇角形の内角の和は何度ですか。』の３種類であり、〇の中には主に八～十二の整数が使われることが多い（ほかの出題の仕方もしているが、少数のため、本稿では深く追求しない）。これらの問題において、多角形が変わることにより難易度が変わるのか、上記の３つの出題の仕方によって正答達成率に差があるのか等、問題が変わることによる影響を調べることにした。
　本稿では、第 206 回（2011. 4. 10）～第 388 回（2022. 3. 5）で出題した 11 年分の問題を調査対象としている。

キーワード：「内角の和」、「１つの内角」、「１つの外角」

１．数検と受検者層、その他注意点

・数検３級では中１～中３の範囲が、数検４級では小６～中２の範囲が出題されるが、誰でも受検できる。ただし時期にもよるが、３級では年間を通して約 65%の受検者が中３であり、４級では年間を通して約 62%の受検者が中２である。
・数検の受検者は、数学が好きな人や得意な人が多い。そのため、学力調査などと比較すると正答達成率は高めである。
・数検は記述式の検定であるが、３級と４級の１次：計算技能検定の解答方法はすべて、答えだけを書く（途中式は不要）ことになっている。
・３級と４級の１次：計算技能検定は〇（１点）か×（０点）で採点している（部分点なし）。
・「多角形の角」の問題は、問題の性質上、まったく同じ問題が出題されることがよくある。それは３級と４級といった異なる階級間でもあてはまる。

２．「多角形の角」の問題における受検者の学年別正答達成率

　前節で述べたように、数検の受検者数は学年別に集計するとかなり偏りがある。学年別にすると、受検者数だけでなく正答達成率にも偏りが出ていることが次ページの表からもわかる。表は、第 206 回（2011. 4. 10）～第 388 回（2022. 3. 5）に出題した「多角形の角」の問題について、その問題を解いた受検者数を学年別にまとめたものである。

・３級１次：計算技能検定　　　　　　　　**学年別正答達成率**

学年	中１以下	中２	中３	高１	高２以上
受検者数（人）	20885	102020	549061	73861	64492
正解者数（人）	15848	80328	444098	45099	34838
正答達成率	75.9％	78.7％	80.9％	61.1％	54.0％

・４級１次：計算技能検定　　　　　　　　**学年別正答達成率**

学年	小６以下	中１	中２	中３	高１以上
受検者数（人）	7843	58345	239085	64822	18053
正解者数（人）	5573	39572	170257	44776	7734
正答達成率	71.1％	67.8％	71.2％	69.1％	42.8％

※受検者数と正解者数は第 206 回～第 388 回の累積

上記の表から、学年別に見ると、３級では中３、４級では中２の正答達成率がもっとも高いことがわかる。さまざまな視点から調査を行った結果、３級１次：計算技能検定に関しては、既習であり、かつボリュームゾーンである中３の受検者の正答達成率が、検定回によらずもっとも振れ幅が少なく安定していることがわかった。そこで本稿では、３級では中３だけに焦点を絞って考察することにした（４級では中２の学年に絞って調査を行ったところ、ある時期を境に正答達成率の傾向が逆転していたため、最後にまとめて紹介することとする）。

ちなみに年齢や学年が不明である受検者は除いて集計しているが、不明である受検者は全体の１％にも満たない。

３．多角形の内角・外角に関する公式

多角形の内角や外角は中２で学習する。具体的には次の①～④である。

① n 角形の内角の和　…　$180\times(n-2)$（度）

② n 角形の外角の和　…　360（度）

③ 正 n 角形の１つの内角の大きさ　…　$\dfrac{180\times(n-2)}{n}$（度）

④ 正 n 角形の１つの外角の大きさ　…　$\dfrac{360}{n}$（度）

教科書では、①を最初に学習する。n 角形の１つの頂点から、対角線を引けるだけ引くと、n 角形は $(n-2)$ 個の三角形に分けられるため、①は 180° が $(n-2)$ 個分という考え方で導かれる。次に n 角形の１つの内角と１つの外角の和は 180° であり、この n 個分から①を引くと、②が導かれる。①、②は当然、正 n 角形のときも成り立つため、①、②の式をそれぞれ n で割ることで、③、④が導かれる。

これらの公式は、覚えずとも導けるようになっているのが望ましいが、公式を覚えていれば計算間違いをしない限り簡単に正解が導ける。このことを踏まえて、さまざまな視点から受検者の傾向を見ていくことにする。

４．各種別正答達成率

４．１　多角形の種類ごとの正答達成率

では、多角形の種類によって難易度に差が出るのだろうか。前節で紹介した公式を覚えていれば、n の値を代入するだけで答えが求まるという点でいえば難易度に差は出ないように思える。実際によく出題される(正)八角形、(正)九角形、(正)十角形、(正)十二角形に限定して、11 年分の正答達成率を調べてみたところ、次の表のようになった。

・３級１次：計算技能検定(中３)　　**多角形の種類ごとの正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
受検者数(人)	88577	120402	121259	87348
正解者数(人)	72083	99450	97481	69573
正答達成率	81.4%	82.6%	80.4%	79.7%

この表から、九角形に関する問題の正答達成率がもっとも高く、十二角形に関する問題の正答達成率がもっとも低いということがわかった(二群の比率の差の検定で、有意水準１%で棄却される)。n 角形の n の値が大きくなるにつれて、正答達成率が低くなるように思われる。

４．２　求める角ごとの正答達成率

次に、求める角によって難易度に差が出るのかを調べた。

便宜上、求める角に【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】とⒶ～Ⓒの記号を付けることにする。このとき、第３節の①～④の式の形だけで判断するならば、【Ⓑ１つの外角】がもっとも易しく、次いで【Ⓒ内角の和】、【Ⓐ１つの内角】の順に難易度が増していくように思われる。実際によく出題される(正)八角形、(正)九角形、(正)十角形、(正)十二角形に限定して、11 年分の正答達成率を調べてみたところ、次の表のようになった。

・３級１次：計算技能検定(中３)　　**求める角ごとの正答達成率**

求める角	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
受検者数(人)	222995	235393	90673
正解者数(人)	175024	190651	78423
正答達成率	78.5%	81.0%	86.5%

この表から、【Ⓒ内角の和】の問題の正答達成率がもっとも高く、次いで【Ⓑ１つの外角】、【Ⓐ１つの内角】の順に正答達成率が低くなることがわかった。その理由は、【Ⓒ内角の和】の問題に関しては、自身で答えを導いている受検者もそれなりに存在するということなのか、あるいは【Ⓐ１つの内角】や【Ⓑ１つの外角】の問題は教科書でもほとんど触れていないため、学校であまり指導していないことも考えられる。

ほかにも、次の２点については疑問が残る。

（ⅰ）　１つの内角を求める問題のほうが、１つの外角を求める問題よりも正答達成率が低い。

（ⅱ）　１つの内角を求める問題と、内角の和を求める問題の正答達成率の差の開きが大きい。

（ⅰ）については、正 n 角形の１つの外角の大きさは、１つの内角の大きさの後に学習するにもかかわらず、正答達成率は高いという結果となっている。これに関しては、正 n 角形の外角の和が n の値にかかわらず 360°で一定であるため、簡単だということだと思われる。

（ⅱ）については、n 角形の内角の和が求めることができれば、それを n で割るだけで正 n 角形の１つの内角の大きさが求まるため、これだけ正答達成率に開きが出るのは意外である（およそ 8%も差が開いている）。n 角形と正 n 角形の違いだけで、内角の和の正答達成率に影響が出るとは考えにくいため、「内角の和を n で割る」という部分が結びついていない、もしくは n で割るのを忘れてしまったと考えられる。また、第３節の③の式を公式として覚えていて、n の値を代入した後の計算で間違えたということも考えられるが、いずれにせよ内角の和を求めることはできるのに１つの内角を求めることができないというのは由々しき問題であると感じた次第である。

しかし、内角の和を求める問題の正答達成率がもっとも高いのは理解できる。公式で比較するならば、正 n 角形の１つの外角の大きさがもっとも簡単に思えるのだが、実は多角形の内角の和は小５で学習する。ただ、小５の教科書で扱っているのは七角形や八角形あたりまでであり、一般化した n 角形を扱うのは中２からである。数検の３級（４級も同様）の１次：計算技能検定では未知数 n を使わない具体的な多角形を扱っているため、受検者は小５で学習する、多角形の１つの頂点から対角線を引けるだけ引いて内角の和を求めるやり方で正解を導けるのである。この方法で問題を解いている受検者は少なくないと思われる。次節以降はこの点を詳しく調べていくことにする。

４．３　多角形の種類および求める角の正答達成率

多角形の内角の和を、第３節の最後で触れたような、１つの頂点から対角線を引けるだけ引いて $(n-2)$ 個の三角形をつくり、180°が $(n-2)$ 分であると考えて求める場合、n 角形の n の値が大きくなるにつれて、正答達成率が低くなっていくことが予想される。実際に、４．１節の「多角形の種類ごとの正答達成率」と第４．２節の「求める角ごとの正答達成率」を組み合わせて算出したところ、次の表のようになった。

・３級１次：計算技能検定(中３)　　　　**多角形の種類および求める角の正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
【Ⓐ１つの内角】	77.6%	80.4%	78.7%	78.0%
【Ⓑ１つの外角】	80.9%	82.9%	80.5%	80.0%
【Ⓒ内角の和】	88.0%	87.0%	86.1%	84.3%

【Ⓒ内角の和】の問題の場合、n 角形の n の値が大きくなるにつれて正答達成率が徐々に低くなっていることがわかる。このことから、内角の和を求めるにあたっては、実際に図をかいて(対角線を引いて)正解を導いている受検者が一定数存在して、n の値が大きくなるにつれて計算間違いをしやすくなるのかもしれない。

【Ⓐ１つの内角】と【Ⓑ１つの外角】の問題の場合は、n の値による影響は無いように思えるものの、【Ⓐ１つの内角】と【Ⓑ１つの外角】のどちらの問題においてもなぜか九角形のときにもっとも正答達成率が高い(ただ、その理由はわかっていない)。しかし、この表を縦に見ると、すべての多角形で正答達成率が

【Ⓐ１つの内角】＜【Ⓑ１つの外角】＜【Ⓒ内角の和】

の関係になっていることがわかる。

１つの内角、１つの外角、内角の和について、相互に関連した知識・技能が身に付いていないことが考えられる。そのため、相互の関連を重視して指導したり学習することが望まれる。

５．一般的な n 角形の場合

３級２次：数理技能検定で、一般化した n 角形を扱った問題を出題したことがある。それは下のような問題であり、このときの中３の受検者数は 4405 人であった。

■問題Ｘ(３級２次：数理技能検定に出題)

正 n 角形について，次の問いに n を用いて答えなさい。ただし，n は３以上の整数とします。

(1)　１つの外角の大きさは何度ですか。　　　　(正答達成率　68.0%)

(2)　１つの内角の大きさは何度ですか。　　　　(正答達成率　52.2%)

(正解)　(1)　$\dfrac{360}{n}$ (度)　　　(2)　$\dfrac{180\,(n-2)}{n}$ (度)

この問題Ｘが実施された検定回の３級１次：計算技能検定では、「九角形の内角の和は何度ですか」という問題を出題しており、その問題における中３の正答達成率は 87.3%だった。上記の表で判断するならば、一般的な n 角形になると、【Ⓑ１つの外角】の問題では正答達成率が約 12～15%低くなり、【Ⓐ１つの内角】の問題では正答達成率が約 25～28%低くなるといえそうである。

中３の受検者で集計しているため、受検者全員が一度は学習している内容ではあるのだが、必ずしも公式を覚えているというわけではないということもわかった。

余談ではあるが、次の問題Ｙのように、外角の和が 360° であるというヒントを与えると、正答達成率が格段に高くなることもわかった(問題Ｙは考え方をわかりやすく示しているという要素もあるだろうが)。このときの中３の受検者数は 5329 人である。

■問題Ｙ(３級２次：数理技能検定に出題)

次の考え方で，正 n 角形の１つの内角の大きさを求めることができます。

> 多角形の外角の和は 360° であるから，正 n 角形の１つの外角の大きさは
> (　Ａ　)°　となる。
> よって，正 n 角形の１つの内角の大きさは
> (　Ｂ　)°　－(　Ａ　)°
> となる。

これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　Ａにあてはまる式を，n を用いて表しなさい。　(正答達成率　89.1%)

(2)　Ｂにあてはまる数を答えなさい。　(正答達成率　83.4%)

(正解)　(1)　$\dfrac{360}{n}$ (度)　　(2)　180(度)

この問題Ｙが実施された検定回の３級１次：計算技能検定では、「正十角形の１つの外角の大きさは何度ですか」という問題を出題しており、その問題における中３の正答達成率は 85.2% だった。 つまり、外角の和が 360° であるということを覚えていない中３の受検者もそれなりに存在しているということも判明した(問題ＸとＹの(1)の正答達成率の差から、その割合はおよそ 20～30%と推定される)。具体的な多角形で、【Ⓑ１つの外角】の問題の正答達成率が 80% 以上であることから、【Ⓑ１つの外角】を求めるにあたって、まず【Ⓐ１つの内角】を求めて、180° から引いた受検者も数%いることが考えられる。

ところで、具体的な多角形ではなく n 角形の問題になると、正答達成率が急激に下がることが問題Ｘから明らかになったが、では問題Ｘが解けた受検者は１次：計算技能検定で出題された具体的な多角形も解けたのだろうか。一般的な考えからすれば、n 角形の問題が解ければ、具体的な多角形の問題でも解けるはずだが、このあたりをきちんと調査する必要性を感じた。

前々ページで触れたが、３級２次の問題Ｘが出題された検定回での３級１次：計算技能検定の問題は、「九角形の内角の和は何度ですか」で、中３の正答達成率は 87.3％だった。このときの中３の受検者数は 4075 人だったが、この検定回において、１次：計算技能検定と２次：数理技能検定の両方を受検したのは 4015 人であり、この 4015 人を対象に上記の調査を行った。

以下、１次：計算技能検定で出題された問題を㋑、問題Ｘで出題された(1)(2)の問題をそれぞれ㋺、㋩として、㋺、㋩の問題を次のように簡略化する。

㋑「九角形の内角の和は何度ですか」　（正答達成率　87.3％）
㋺「n 角形の１つの外角の大きさは何度ですか」　（正答達成率　67.5％）
㋩「n 角形の１つの内角の大きさは何度ですか」　（正答達成率　54.4％）

なお、上記に示した正答達成率は、１次：計算技能検定と２次：数理技能検定の両方を受検した 4015 人に限定したものであり、前ページに示した正答達成率とは若干値が異なっている。

ところで、前ページ最後に記した疑問であるが、調査した結果は次のとおりであった。

・㋺を正解したのは 2710 人で、そのうち㋑を正解したのは 2470 人（正答達成率は 91.1％）
・㋩を正解したのは 2185 人で、そのうち㋑を正解したのは 1989 人（正答達成率は 91.0％）

これらの正答達成率は当然、㋑のみの正答達成率である 87.3％を上回ったものの、どちらも４％弱しか上回っておらず、100％にはほど遠い。これはかなり意外な結果であった。

したがって、次の調査も追加で行った。

・㋺と㋩をどちらも正解したのは 1660 人で、そのうち㋑を正解したのは 1528 人（正答達成率は 92.0％）

この調査でも、正答達成率 100％にはほど遠い結果となった。どうやら、n 角形の問題を解くことはできても、具体的な多角形の問題が必ずしも解けるわけではないようである。このことは、公式だけで対応できるものの、図形と結びついていない可能性を感じた。

６．受検者の誤答から見られた傾向

６．１　n 角形の場合

第５節で紹介した問題Ｘから、１次：計算技能検定で出題する具体的な多角形の問題と比較すると、一般的な n 角形の問題は正答達成率がかなり下がることがわかった。n 角形の誤答を調査することで、間違えた根本的な原因が判明することもあるため、一般的な n 角形の問題で間違えた受検者がどのような間違え方をしたのかということを見ていくことにする。

＜問題Ｘ(1)でよく見られた誤答＞

① $\dfrac{n}{360}$(度)(分母と分子が逆になっている)　… 116人　(反応率　2.6%)

② $\dfrac{180}{n}$(度)(外角の和が180°だと思っている)　… 82人　(反応率　1.9%)

③ 360 (度)(外角の和を答えている)　… 80人　(反応率　1.8%)

④ $360-\dfrac{180\times(n-2)}{n}$(度)

(360°から１つの内角を引いている)　… 69人　(反応率　1.6%)

＜問題Ｘ(2)でよく見られた誤答＞

⑤ $180(n-2)$(度)(内角の和を答えている)　… 1174人　(反応率　26.7%)

⑥ $\dfrac{360}{n}$(度)(１つの外角の大きさを答えている)　… 66人　(反応率　1.5%)

問題Ｘ(1)は、正n角形の１つの外角を求める問題であるが、その代表的な誤答は①～④の４つであった。反応率はどれも２％前後とやや少なめではあるが、特筆すべきなのは④である。④の式を書いた受検者は、下の図１ではなく図２のように、外角を誤認識していたのである。

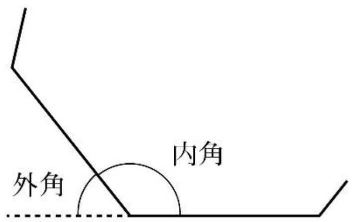

図１

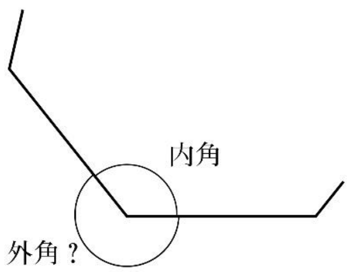

図２

外角を正しく図１で理解していた人は、その後に正しく計算ができていれば正解が導ける。しかしこの問題は、途中式を必要とせず答えだけを書く形式であったため、正解だった場合は考え方まではわからないのだが、④の形の誤答がそれなりに多く見られたため、受検者の考え方の一部を知ることができた。このことから、正n角形の１つの外角を求めるにあたって、外角の和である360°をnで割るのではなく、１つの内角の補角であると考えて、180°から１つの内角の大きさを引いて求めている人も少なくないということがわかった。

ちなみに④の式は、計算を続けると次のようになる。これら３つのどの式であっても、④の誤答数に含めているが、最後の式の形を答えた受検者は６人のみであった。

$$360-\frac{180\times(n-2)}{n}=360-\frac{180n-360}{n}=180+\frac{360}{n}\ (度)$$

そして、問題X(2)は正 n 角形の１つの内角を求める問題であるが、驚いたことに内角の和である⑤を答えた受検者が 23.8%もいたのである。次に多かったのが、１つの外角の大きさである⑥だったのだが、これは 1.5%と大幅に減っている。だが、これら⑤、⑥の誤答や(1)の③の誤答がよく見られたことを考慮すると、この「多角形の角」を求める問題で間違えた人の多くは、問題文をきちんと読んでおらず、別の角の大きさを求める間違い方であることが判明した。

余談ではあるが、問題X(1)で④の間違いをした 69 人は、正 n 角形の１つの内角は理解しているといえそうである。そこでその 69 人の(2)の正答達成率(部分点を含む)を調べたところ、84.8%と高めになった。これは母集団のときの 52.2%と比較すると、(当然ではあるが)かなり大きな差である。

では、正答達成率はかなり高かったものの、問題Yではどのような誤答が多かったのだろうか。誤答自体が少なかったものの、調べてみたところ興味深い結果が出たので、紹介する。

＜問題Y(1)でよく見られた誤答＞

⑦　$\frac{n}{360}$ (度)(分母と分子が逆になっている)　… 161 人　(反応率　3.0%)

⑧　$n-2$ (度)(１つの頂点から引ける対角線の数)　… 66 人　(反応率　1.2%)

＜問題Y(2)でよく見られた誤答＞

⑨　360 (度)(外角の和を答えている)　… 374 人　(反応率　7.0%)

⑩　$180(n-2)$ (度)(内角の和を答えている)　… 132 人　(反応率　2.5%)

問題Y(1)は、正 n 角形の１つの外角を求める問題であるが、よく見られた誤答は、⑦の分母と分子が逆になっている解答である。この傾向は、問題X(1)と同様である。次に多かった誤答は、⑧の「$n-2$」というものであるが、これはもはや角度ではない。問題文をきちんと読んでいなかったにしても、この間違いは酷いものである。

続いて問題Y(2)の正 n 角形の１つの内角を求める問題であるが、これは公式を暗記しなくても 180° から(1)の値を引けば求めることができるということを、問題を通して伝えたかったといった意図があったのだが、これに関しても問題文をきちんと読んでいない解答が目立った。具体的には、⑨の外角の和を答えた受検者が多く見られ、次いで多かったのは⑩の内角の和を答えた受検者だった。

n 角形の場合はなかなか想像しづらい誤答が見られたが、問題X(2)でよく見られた誤答は、多角形の角の問題の本質を表しているように思えた。そこで、次節では具体的な多角形を与えた３級１次：計算技能検定の問題の誤答を考察することにする。

６．２　具体的な多角形の場合

３級１次：計算技能検定では、一般的な n 角形ではなく具体的な多角形で【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】(以下、【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】とする)を求める問題を出題してきた。それぞれの問題でどのような誤答が多く見られたのかを調査したところ、結論から述べると、【Ⓐ】の問題のときは【Ⓑ】と【Ⓒ】の角の大きさ、【Ⓑ】の問題のときは【Ⓐ】と【Ⓒ】の角の大きさ、【Ⓒ】の問題のときは【Ⓐ】と【Ⓑ】の角の大きさを答える誤答が多く見られた。

４．３節で、多角形の種類と【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】の問題の種類によって、正答達成率に差が出るものがあるということを記した。ここでは多角形の種類を１つにまとめて正答達成率とそれぞれの誤答の割合を表にしたところ、以下の表のようになった((正)八角形、(正)九角形、(正)十角形、(正)十二角形以外の多角形も含めているが、次節で述べる「例外的な傾向が見られる多角形」は除いている)。ただし、誤答については約 15 万人分の部分調査となっている。

・３級１次：計算技能検定(中３)　　**【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】の反応率**

解答＼問題	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
【Ⓐ１つの内角】	77.5%(正解)	7.4%	5.1%
【Ⓑ１つの外角】	3.2%	80.9%(正解)	0.7%
【Ⓒ内角の和】	9.6%	2.8%	84.0%(正解)

この表から、【Ⓐ】を求める問題では【Ⓒ】を答える誤りがもっとも多く、【Ⓑ】を求める問題では【Ⓐ】を答える誤りがもっとも多く、【Ⓒ】を求める問題では【Ⓐ】を答える誤りがもっとも多いことがわかる。

なぜ別の角度を求める誤りが多いのかということは、いろいろと理由は考えられるが、【Ⓐ】と【Ⓑ】を求める問題については第８節で紹介することにする。【Ⓒ】については、(第７節で明らかになるが)各学校で公式を導き出すまでの指導を丁寧に行っていると考えられ、それなりに定着していると考えられる。

ところで、上の表には記載していないのだが、【Ⓑ】を求める問題では【Ⓐ】と【Ⓒ】以外にもよく見られる誤答が存在した。それは、正解の角度よりも 180° 大きい角度である。これは、６．１節の図２における外角の誤認識であるが、その反応率は 3.0%であり、２番めに多く見られることとなった。

ちなみに、外角の和である「360°」という誤答もありそうな気はしたものの、【Ⓐ】を求める問題ではほとんどおらず、【Ⓑ】や【Ⓒ】の問題でもその反応率は１％未満であった。

余談ではあるが、第５節で紹介した内容に少し戻るが、㋺と㋩をどちらも正解したのに㋑が不正解だった受検者は 132 人（８％）いた。n 角形の問題が解ける集団であるにもかかわらず、具体的な多角形の問題が解けなかった人たちであるが、彼らはどんな間違え方をしていたかが気になり調べてみたところ、正九角形の１つの内角の大きさである「140°」と答えていた人がもっとも多く、その人数は 90 人(68.2%)だった。この割合の高さは、前ページの割合と比較すると、もはや異常値である。

７．例外的な傾向が見られる多角形

６．２節では、【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】の問題別に見られる誤答を紹介した。そこでよく見られる誤答の反応率は、検定回や多角形の種類によってそれほど大きくは変わらないということもわかった。だが、例外的な傾向が見られる多角形も存在する。それは七角形や十四角形といった、１つの内角や１つの外角の大きさが分数値となるような多角形である。以後、このような多角形を、特殊な多角形と呼ぶ。

角度を分数で表記する場面は教科書に扱われていない。数検でも、七角形や十四角形などを扱う場合は【Ⓒ内角の和】のみで出題している。ここでは七角形の問題に限定し、【Ⓒ内角の和】の問題で出題したときの解答状況をまとめたところ、以下のようになった。

＜問題＞　　　七角形の内角の和は何度ですか。
＜調査対象＞　３級１次：計算技能検定（中３）　13572 人
＜解答状況＞

①	900（度）（正解）	… 12648 人	（正答達成率　93.2%）
②	$\frac{900}{7}$（度）（１つの内角の大きさ）	… 26 人	（反応率　0.2%）
③	$\frac{360}{7}$（度）（１つの外角の大きさ）	… 0 人	（反応率　0.0%）

６．２節の表は、傾向が変わってしまうため、七角形や十四角形などといった特殊な多角形の問題を含めていないのだが、この表と比較すると、特殊な多角形の問題の特異性は、以下の２点に集約されているといえる。

・【Ⓒ内角の和】で出題したほかの多角形の正答達成率よりも、約 10%高くなる。
・【Ⓐ１つの内角】と【Ⓑ１つの外角】を答える間違いがほとんどない。

これらのことから、七角形などで【Ⓒ】を求める問題を出題すると、間違って【Ⓐ】や【Ⓑ】を求めたとしても、答えが分数となることで疑問を感じ、そこで修正されるようである。つまり、きちんと問題文を読んでさえいれば、この【Ⓒ内角の和】の問題では９割以上の受検者が解くことができるといえそうである。

８．教科書での扱い

４．３節で、基本的にどの多角形についても、正答達成率は

【Ⓐ１つの内角】＜【Ⓑ１つの外角】＜【Ⓒ内角の和】

の関係が成り立っていることを紹介した。その理由を探るために、７社の現行の中２の教科書を調べたところ、おぼろげながらその理由がわかってきた。

第３節で、以下の①～④の４つの公式を紹介したのだが、７社のうち６社の教科書は公式として扱っていた(色付きで囲われていた)のは①、②のみであり、残りの１社は公式として扱っていた式は皆無であった。

① n 角形の内角の和 … $180\times(n-2)$ (度)

② n 角形の外角の和 … 360(度)

③ 正 n 角形の１つの内角の大きさ … $\dfrac{180\times(n-2)}{n}$ (度)

④ 正 n 角形の１つの外角の大きさ … $\dfrac{360}{n}$ (度)

①と②を公式として扱っていた６社の教科書は、③と④については n を使った式では掲載されておらず、具体的な多角形で１問ずつ問題として出題していただけであった。残りの１社の教科書は、③と④の問題すら掲載されていなかった。

確かに①、②さえしっかりと押さえていれば、③、④の問題も当然解けるだろうと思えてしまうが、実際には内角については、４．２節や４．３節の表にもあるように、【Ⓐ１つの内角】と【Ⓒ内角の和】の問題の正答達成率に大きな開きがある。Ⓒは求められてもⒶが求められない、すなわち n 角形であれば n で割るということが結びついていない受検者がそれなりにいるということが判明した。このことは６．１節において、問題Ｘ⑵でよく見られた誤答の中で、誤って内角の和を答えている受検者が 23.8％もいたことからも明らかである。

なぜこのような傾向があるのかということについては、仮説ではあるが、以下の理由が考えられる。

１）教科書で１つの内角や１つの外角の扱いが小さいため。

２）内角の和や外角の和の意味は理解していても、１つの内角や１つの外角の意味が理解できていない。

３）正解を導くまでに複数のプロセスがある場合、その途中の段階で求めた値を正解だと錯覚してしまう。

３）のケースに至っては、ほかの単元の調査をしていてもよく見かけることである(本稿の第10 節で少し触れることにする)。これは、たとえば【Ⓐ１つの内角】の問題の場合、上記③の公式を使わずに解くのであれば

㋐　内角の和を求めてから１つの内角の大きさを求める
㋑　１つの外角の大きさを求めてから１つの内角の大きさを求める

のどちらかで解く人が多いと思われるが、㋐であれば内角の和、㋑であれば１つの外角の大きさを求めた時点で、それが答えであると錯覚してしまうといったものである。

学習の評価の「主体的に学習に取り組む態度」では、「問題解決過程を振り返って評価・改善しようとしている」ことが評価規準として示されている。この指導を、授業の中で行っていただければ、かなり改善が期待できる。

９．１次：計算技能検定合格率との関係

実用数学技能検定の３級１次：計算技能検定（４級１次も同様だが）は、全部で 30 問出題され、そのうち 21 問以上正解すると合格である。１問１点で採点しているため、21 点以上取得すれば合格となる。

今回調査した「多角形の角」の問題の正答達成率と１次：計算技能検定の合格率について、相関はあるものの、それほど強くはないということがわかっている。年度や学年によっても大きく変わるが、相関係数は３級（中３）の各検定回で 0.2～0.8 とばらついているのである（４級（中２）に至っては相関係数が負の値をとることもあった）。その理由としては、合格点は 30 点満点中 21 点であるが、合格者の大多数は 22 点以上を取得しており、つまりこの問題が解けなくても合否にほとんど影響がないのである。しかし、さまざまな視点から調査をしたところ、なかなか興味深い傾向があることがわかった。この問題で、ある特定の間違いをしている受検者たちの傾向である。

６．２節で記したように、【Ⓐ】を求める問題のときは【Ⓑ】と【Ⓒ】の大きさ、【Ⓑ】を求める問題のときは【Ⓐ】と【Ⓒ】の大きさ、【Ⓒ】を求める問題のときは【Ⓐ】と【Ⓑ】の大きさを答える誤答がそれなりに見られたのだが、このような誤答を書いた人たちの１次：計算技能検定の合格率は、受検者全体の合格率と比較すると、意外と低いのである。

先述したとおり、合格点は 30 点満点中 21 点であるが、合格者の大多数は 22 点以上を取得しているため、この問題が解けなくても合否にほとんど影響はない。年度によって多少差はあるものの、2011～2021 年度の 11 年間の累計で、３級１次合格率（中３）は 86.9％、そのうち 21 点で合格したのは 3.7％である。つまり、この１問を間違えても、合格から不合格になるのは高々数％程度と考えていたのだが、上記の間違い方をした人たちの合格率は、正解だった人たちの合格率と比較してかなり低くなっているのである。調べられた範囲で合格率まとめたところ、次ページのような結果となった。なお、【Ⓒ】を求める問題においては、特殊なケースである七角形や十四角形等を除いている。

■３級１次：計算技能検定（中３）

・【Ⓐ１つの内角】を求める問題

受検者の解答	Ⓐ（正解）	ⒷまたはⒸ
該当者数（人）	55282	7439
３級１次：計算技能検定合格者数（人）	47217	5456
３級１次：計算技能検定合格率	85.4%	73.3%

・【Ⓑ１つの外角】を求める問題

受検者の解答	Ⓑ（正解）	ⒶまたはⒸ
該当者数（人）	71790	6755
３級１次：計算技能検定合格者数（人）	62741	5121
３級１次：計算技能検定合格率	87.4%	75.8%

・【Ⓒ内角の和】を求める問題

受検者の解答	Ⓒ（正解）	ⒶまたはⒷ
該当者数（人）	42254	1679
３級１次：計算技能検定合格者数（人）	35601	1233
３級１次：計算技能検定合格率	84.3%	73.4%

上記の間違い方をした人たちの合格率は、正解者の合格率と比較してかなり低くなっていることがわかる。決して「多角形の角」を理解していないわけではなく、別の角度を求めただけなのに、である。

このことからいえることとして、こういった間違い方はほかの問題にも影響を及ぼしているということである。おそらくは問題をきちんと読んでいない、見直しをしていないなどが大きな理由であると思われるが、第８節の３）のように、正解を導くまでに複数のプロセスがある場合、その途中で終えてしまう受検者が少なくないということも理由にありそうである。

この「多角形の角」の問題そのものは、日常のどの場面で使われているかというのはわかりにくいため、解けなくてもいいと考える人もいるかもしれないが、こういった問題でも丁寧に答えを求めようとする姿勢は大切だといえる。

10. 内角の和から多角形の種類を求める問題

近年では出題していないが、2015 年頃まで数回ほど、内角の和から多角形の種類（何角形か）を求める問題を出題していたことがある。たとえば、次のような問題である。

<問題>　　　内角の和が 1980° である多角形は何角形ですか。
<調査対象>　３級１次：計算技能検定（中３）　3818 人
<解答状況>
　①　十三（角形）　（正解）　　　　　　　… 2918 人　　　（正答達成率　76.4%）
　②　十一（角形）　（１つの内角の大きさ）　… 448 人　　　（反応率　11.7%）

　これはある検定回で出題した問題とその結果である。正解は十三角形であるが、十三角形の内角の和は、180×(13－2)＝180×11＝1980(度)であるから正しい。しかし、間違えた受検者の約半数は、十一角形と答えていた。これは 1980 を 180 で割った値である。
　この類題はあまり出題されていなかったため、検定回ごとではなく、この類題をまとめて集計した。その結果は、次のとおりである。

<調査対象>　３級１次：計算技能検定（中３）　14206 人
<解答状況>
　①　正解　　　　　　　　　　　　　　　… 11051 人　　（正答達成率　77.8%）
　②　180° で割った値　　　　　　　　　　… 1553 人　　（反応率　10.9%）

　４．３節で、内角の和を求める問題の正答達成率（以下の表）を紹介した。この表の正答達成率と比較すると、内角の和から多角形の種類を求める問題の正答達成率は低いことがわかる。そして、内角の和を求める問題では、n 角形の内角の和は何度かと問われて 180n(度）の値を答える受検者はほとんどいなかったのだが、逆の問い方をすると内角の和が 180n(度）だと思っているような解答が多く見られるのである。

・３級１次：計算技能検定（中３）　**内角の和を求める問題の正答達成率**

多角形	（正）八角形	（正）九角形	（正）十角形	（正）十二角形
【Ⓒ内角の和】	88.0%	87.0%	86.1%	84.3%

　上記の内角の和が 1980° である多角形の例では
　　1980° ÷180° ＝11　　　…㋐
　　11＋2＝13　　　　　　…㋑
と、一旦㋐を求めてから㋑の正解を導くのだが、㋐を求めた時点で満足してしまい、それを答えとしてしまったと考えられる。これは第８節の３）でも触れたが、正解を導くまでに複数のプロセスがある場合、その途中の段階で求めた値を正解だと錯覚してしまう例である。
　このような間違いは、練習をこなしていくことで減らしていってもらいたいが、この問題に関しては、「180(n－2)＝1980」という方程式をつくれば簡単に正解は導ける。逆にいえば、少なくとも 180 で割った値を答えた 10.9%の受検者は、方程式をつくっていなかったのだろう。

３級１次：計算技能検定(中３)の整数係数の一次方程式の正答達成率は、ほぼ全員が正解して(正答達成率は 97%以上)いることからも明らかである。

11. ４級１次：計算技能検定(中２)の傾向

本調査は、４級１次：計算技能検定でも同様に行っていた。しかし、３級(中３)とは異なり、４級(中２)では正答達成率が安定しておらず、偏りが存在していた。「多角形の角」は中２の２学期で教える学校が多いが、おそらくはそれが理由で、10 月半ばの検定を境にして、中２とそれ以外の学年で正答達成率の上下が逆転するのである。そこで、便宜上、４月～10 月前半を前期、10 月後半～３月末を後期と呼ぶことにして、４級１次：計算技能検定(中２)の傾向を前期と後期に分けて集計した。その結果は、次のようになった。

・４級１次：計算技能検定(中２)における「多角形の角」の正答達成率

「多角形の角」の正答達成率

学年	中２前期	中２後期
受検者数(人)	73720	165365
正解者数(人)	44283	125974
正答達成率	60.1%	76.2%

※第 206～388 回から抽出

・多角形の種類ごとの正答達成率

(中２前期)　**多角形の種類ごとの正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
受検者数(人)	15996	13135	10837	13897
正解者数(人)	9415	7966	6386	7772
正答達成率	58.9%	60.6%	58.9%	55.9%

(中２後期)　**多角形の種類ごとの正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
受検者数(人)	30958	33575	34741	22227
正解者数(人)	23805	26189	26129	15990
正答達成率	76.9%	78.0%	75.2%	71.9%

どの多角形においても、前期と後期で 16～18%近く差が開いている。

・求める角ごとの正答達成率

（中２前期）　**求める角ごとの正答達成率**

求める角	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
受検者数(人)	30458	19333	23929
正解者数(人)	16677	10566	17040
正答達成率	54.8%	54.7%	71.2%

（中２後期）　**求める角ごとの正答達成率**

求める角	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
受検者数(人)	55310	57634	52896
正解者数(人)	38379	43921	43974
正答達成率	69.4%	76.2%	83.1%

中２の前期と後期で比較すると、【Ⓒ内角の和】を求める問題で約12%、【Ⓐ１つの内角】を求める問題で約15%、【Ⓑ１つの外角】を求める問題に至っては20%以上の差が開いている。

・多角形の種類および求める角の正答達成率

（中２前期）　**多角形の種類および求める角の正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
【Ⓐ１つの内角】	56.9%	54.2%	58.9%	54.2%
【Ⓑ１つの外角】	51.9%	55.1%	54.5%	56.3%
【Ⓒ内角の和】	67.7%	66.9%	73.6%	62.1%

（中２後期）　**多角形の種類および求める角の正答達成率**

多角形	(正)八角形	(正)九角形	(正)十角形	(正)十二角形
【Ⓐ１つの内角】	72.2%	65.3%	72.6%	70.8%
【Ⓑ１つの外角】	78.0%	79.6%	75.4%	72.6%
【Ⓒ内角の和】	83.4%	80.9%	81.8%	75.4%

４級１次：計算技能検定(中２)は、３級１次：計算技能検定(中３)と比較すると受検者数が半数以下になるうえに、前期と後期に分けて上記のように12のカテゴリーに分類すると、１つのカテゴリーあたりの受検者数はかなり少なくなるものの、どのカテゴリーでも中２の前期と後期で差が大きく開いている。

・【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】の誤答の反応率

（中２前期）

【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】の反応率

解答＼問題	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
【Ⓐ１つの内角】	53.4%（正解）	12.3%	3.7%
【Ⓑ１つの外角】	14.0%	53.8%（正解）	5.9%
【Ⓒ内角の和】	11.6%	3.3%	67.3%（正解）

（中２後期）

【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】の反応率

解答＼問題	【Ⓐ１つの内角】	【Ⓑ１つの外角】	【Ⓒ内角の和】
【Ⓐ１つの内角】	71.6%（正解）	6.6%	3.6%
【Ⓑ１つの外角】	5.3%	78.5%（正解）	2.5%
【Ⓒ内角の和】	13.3%	2.6%	82.5%（正解）

中２の前期と後期で比較すると、【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】の反応率が一部を除いて減少する結果となった。正答達成率が前ページの表と比較して多少異なるのは、反応率を調査した検定回が限定的（部分調査）だったためである。

・【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】の誤答をしたグループの合格率

（中２前期）

【Ⓐ１つの内角】を求める問題

受検者の解答	Ⓐ（正解）	ⒷまたはⒸ
該当者数（人）	5378	1378
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	4994	1249
４級１次：計算技能検定合格率	92.9%	90.6%

【Ⓑ１つの外角】を求める問題

受検者の解答	Ⓑ（正解）	ⒶまたはⒸ
該当者数（人）	8042	1260
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	7278	1151
４級１次：計算技能検定合格率	90.5%	91.3%

【Ⓒ内角の和】を求める問題（七角形などの特殊な多角形を除く）

受検者の解答	Ⓒ（正解）	ⒶまたはⒷ
該当者数（人）	9431	883
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	8382	683
４級１次：計算技能検定合格率	88.9%	77.3%

（中２後期）

【Ⓐ１つの内角】を求める問題

受検者の解答	Ⓐ（正解）	ⒷまたはⒸ
該当者数（人）	9375	1747
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	8654	1538
４級１次：計算技能検定合格率	92.3%	88.0%

【Ⓑ１つの外角】を求める問題

受検者の解答	Ⓑ（正解）	ⒶまたはⒸ
該当者数（人）	14147	1291
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	13011	1108
４級１次：計算技能検定合格率	92.0%	85.8%

【Ⓒ内角の和】を求める問題（七角形などの特殊な多角形を除く）

受検者の解答	Ⓒ（正解）	ⒶまたはⒷ
該当者数（人）	15898	808
４級１次：計算技能検定合格者数（人）	13997	599
４級１次：計算技能検定合格率	88.0%	74.1%

「多角形の角」を学習した後であろう中２後期では、３級１次：計算技能検定と同様の傾向が見られ、【Ⓐ】、【Ⓑ】、【Ⓒ】の誤答を答えた受検者の合格率は、この問題の正解者の合格率と比較すると、（３級ほど差は大きくはないものの）それなりに下がっている。

中２前期では、【Ⓒ】を求める問題においては３級１次：計算技能検定と同様の傾向が見られたものの、【Ⓐ】を求める問題においては合格率の差がほとんどなく、【Ⓑ】を求める問題においてはなぜか合格率に逆転現象が起きている。これは、学習後は、学習内容が定着している人とそうでない人との比較といえる一方で、学習前は、どちらもそれなりに予習をして挑んだ人たちであるからなのかもしれない。

参考までに、2011～2021年度の11年間の累計で、４級１次合格率(中２)は89.5%、そのうち合格のボーダーラインである21点で合格したのは3.3%である。４級１次検定も３級１次検定と似たような状況となっているが、とくに中２後期においては差が大きく開いているのは、第９節でも述べたように、こういった間違い方がほかの問題にも影響を及ぼしているからと思われる。「多角形の角」の問題で正しく正解が導けるように訓練することは、数学全般の問題を解くうえでも重要なことだといえる。

12. 最後に

数検の３級や４級の１次：計算技能検定で出題される「多角形の角」の問題は、もともと正答達成率が高めに出る傾向があるため、問題ごとに差があるのかといったことについては気にしたことがなかった。しかし今回、さまざまな視点から調査を行ったところ、筆者も想像していなかった事実が次々と判明したので、以下にまとめておくことにする。なお、ここで現れるnは、３以上の整数とする。

- 正答達成率は、どの多角形においても【Ⓐ１つの内角】＜【Ⓑ１つの外角】＜【Ⓒ内角の和】の順に並ぶ。とくに、【Ⓑ１つの外角】と【Ⓒ内角の和】の間には1.8～3.3%の差が開いており、【Ⓐ１つの内角】と【Ⓒ内角の和】の間には6.3～10.4%の差が開いている。
- 【Ⓒ内角の和】の問題については、n角形のnの値が大きくなるにつれて、正答達成率が下がる傾向がある。
- 現行の教科書では、【Ⓐ１つの内角】と【Ⓑ１つの外角】の扱いが小さい(取り扱っていない教科書もある)。
- 具体的な多角形ではなく一般的な n 角形になると、【Ⓑ１つの外角】の問題では正答達成率が12～15%低くなり、【Ⓐ１つの内角】の問題では正答達成率が25～28%程度低くなる。
- 外角の和が360°であるということを覚えていない中３の受検者の割合は20～30%(もしくはそれ以上)いると推定される。【Ⓑ１つの外角】の正答達成率は80%強であることから、外角の和が360° であることを使わずに「【Ⓒ内角の和】→【Ⓐ１つの内角】→【Ⓑ１つの外角】」のように順に答えを導いている受検者もそれなりにいることがわかる。
- 一般的なn角形で【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】を求めることができても、具体的な多角形で同様の角を求めることができるとは限らない(求めることができない人は８%程度存在する)。
- 【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】、【Ⓒ内角の和】のどれかを求める問題において、多く見られる間違いは、正解以外(正解がⒶであれば、ⒷとⒸ)の２つである。
- 上記の理由としては、計算の途中で求めた値を答えとしてしまったことも考えられる。たとえば、【Ⓐ１つの内角】を求めるにあたって、内角の和を求めてから１つの内角の大きさを求める方法や、１つの外角の大きさを求めてから１つの内角の大きさを求める方法があるが、計算の途中の段階である下線部の部分を答えた受検者が少なくないと考えられる。

・計算の途中で終えてしまう受検者が約10%いると推定されるが、図形をえがきながら解くことで、改善が期待できる。
・七角形、十一角形など、【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】で出題することのない問題(出題すると正解が分数の角度となるため)は、【Ⓒ内角の和】で出題したときに正答達成率が極端に上がる。また、そのときの間違い方として、【Ⓐ１つの内角】、【Ⓑ１つの外角】の角度を答える人数の割合も極端に下がる(ほぼ０%)。
・３級１次：計算技能検定において、正解以外(正解が【Ⓐ】であれば、【Ⓑ】と【Ⓒ】)の２つのどちらかを答えた中３の受検者の合格率は極端に下がる。それは、この間違い方がほかの単元の問題でも同じように発生しているからであると考えられる。ただし、４級(中２)においては、既習と思われる受検者はその傾向が弱まり、未習と思われる受検者に対してはあてはまらない。
・内角の和から多角形の種類を求める問題においては、180°で割っただけの誤答が増える。その割合はおよそ10%だが、これは全誤答の解答の半数近くに相当する。

今回、かなり多角的な視点で調査を行い、さまざまな知見を得た。昨今はICTなどを使ったオンライン授業などの影響もあり、傾向が変わってくる可能性もある。引き続き、受検者の解答の状況などを注視していきたい。

参考・引用文献

[1] 公益財団法人日本数学検定協会「第206～372回実用数学技能検定(数学検定)３級」
公益財団法人日本数学検定協会「第206～372回実用数学技能検定(数学検定)４級」
[2]「数学２」啓林館(令和３年)
[3]「数学２」東京書籍(令和３年)
[4]「数学２」数研出版(令和３年)
[5]「数学２」日本文教出版(令和３年)
[6]「数学２」大日本図書(令和３年)
[7]「数学２」学校図書(令和３年)
[8]「数学２」教育出版(令和３年)
[9]「「指導と評価の一体化」のための学習評価に関する参考資料【中学校　数学】」東洋館出版社(令和２年)