学習数学研究紀要

第５巻

公益財団法人 日本数学検定協会

学習数学研究所

学習数学研究紀要　第５巻　目次

巻頭言

公益財団法人 日本数学検定協会
常務理事　登石　明紀

「第四次産業革命を主導し、さらにその限界すら超えて先へと進むために、どうしても欠かすことのできない科学が、三つある。
それは、第一に数学、第二に数学、そして第三に数学である！」

　これは、文部科学省・経済産業省が中心となった「理数系人材の産業界での活躍に向けた意見交換会」の報告書「数理資本主義の時代～数学パワーが世界を変える～」（2019 年３月 26 日公表。以下、「本報告書」）の冒頭に出てくることばです。2006 年に「忘れられた科学―数学」（文部科学省科学技術政策研究所科学技術動向研究センター報告書）という衝撃的なレポートが公表されて以降、これほど痛快にそして腹に落ちる表現で「数学」の重要性を示したものはこれまで見た記憶がありません（ここで言う「数学」とは、純粋数学、応用数学、統計学、確率論、さらには数学的な表現を必要とする量子論、素粒子物理学、宇宙物理学なども含む広範な概念と定義されている）。

　本報告書は、「第三次ＡＩブーム」到来の産業界にあっては、「数学が企業の競争力の勝敗を決する時代になりつつある」と位置づけ、「この未来を担う人材を育て、生かしていくために産学官が密接に連携・協働し、我が国の数学を一層発展させ、数学と異分野との融合による諸科学の発展を強力に推し進めていかなければならない」としています。まさにいま求められているのは、数学を広義にとらえ、理数系文系の垣根を超え、さまざまな分野への数学活用アクションプランを強靭に進めることにあると思います。

　本報告書が公表されてから早３年。2022 年４月の高等学校学習指導要領改訂により数学における統計教育の充実、教科「情報」の新設、金融教育の取り組みの開始にはじまり、大学教育においてはデータサイエンスに関する学部・学科の新設ラッシュなど、教育改革が急速に進められています。産業界においても、第四次産業革命を見据え、数理・データサイエンス・ＡＩを基盤にＤＸ（Digital Transformation）による経営の構造改革や人材育成に力が注がれています。

　しかしその一方で、世間一般には「数学ブーム」が巻き起こっているかというと、そうは言い難い状況です。まだまだ「数学は理数系が学ぶもの」「数学って何の役に立つの」というアレルギーに対する処方箋が十分ではありません。そのためにも、弊会の学習数学研究所の今後の活動領域は重責を担っていると言えるのではないでしょうか。「数学」「数学教育」「生涯学習」を柱に据えながら多種多様な分野へ視点を広げ、多くの研究者の方々からのさまざまな知見を本紀要にまとめ、広く発信することはたいへん意義深いものと思います。近い将来、本紀要が、数学アレルギーを払しょくし歴史を変えた研究誌として名を遺せられる時代がくることを願ってやみません。

　みなさまの忌憚のないご意見と厚いご支援をお願い申し上げます。

【研究論文】

インド工科大学・入試問題研究（その２）

ー　JEE Advanced 数学問題の紹介　ー

学習数学研究所
中村　力

要約

最近実施されたインド工科大学 JEE Advanced の数学入試問題を５個の観点から絞り，日本の大学の数学入試問題には余り見られないユニークな特徴を報告します。

キーワード：
インド工科大学（IIT），　JEE　Advanced 数学

１．はじめに

前論文ではインド工科大学（ITT）の入試制度の概要に触れましたが，本論文では最近実施された JEE　Advanced の数学入試問題を紹介します。

IIT 入試問題に触れることにより，IIT から優秀な人材が輩出される理由や根拠が垣間見えると思います。さらに，日本の大学の数学入試問題とはやや異なるユニークな特徴を感じ取れることでしょう。

２．最近の入試問題（JEE　Advanced）の紹介

ここでは５つの観点より，最近出題された数学の入試問題の一部を紹介します。併せて問題の考え方や解法にも触れます。

（１）ウォーミングアップレベルの問題

まずは，難易度としては比較的易しめの２問を紹介します。２問とも４個の選択肢から１個の解答を選ぶ問題です。

■問題１（2019PAPER1）

x,y 座標系で，$xy \leqq 8$　と　$1 \leqq y \leqq x^2$ で囲まれた領域の面積を次から選びなさい。

（A）$16\log_e 2-\dfrac{14}{3}$　（B）$8\log_e 2-\dfrac{7}{3}$　（C）$16\log_e 2-\dfrac{14}{3}$　（D）$16\log_e 2-6$

【正解】（A）

＜解説＞

双曲線 $xy=8$ と放物線 $y=x^2$ のグラフを描いて，交点の座標を求め積分計算を

行ってください。

交点の座標は（２，４）なので，図１で示した求める面積は

$$面積＝\int_1^2 (x^2-1)dx+\int_2^8\left(\frac{8}{x}-1\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2+\left[8\log_e x-x\right]_2^8=16\log_e 2-\frac{14}{3}$$

で求められます。

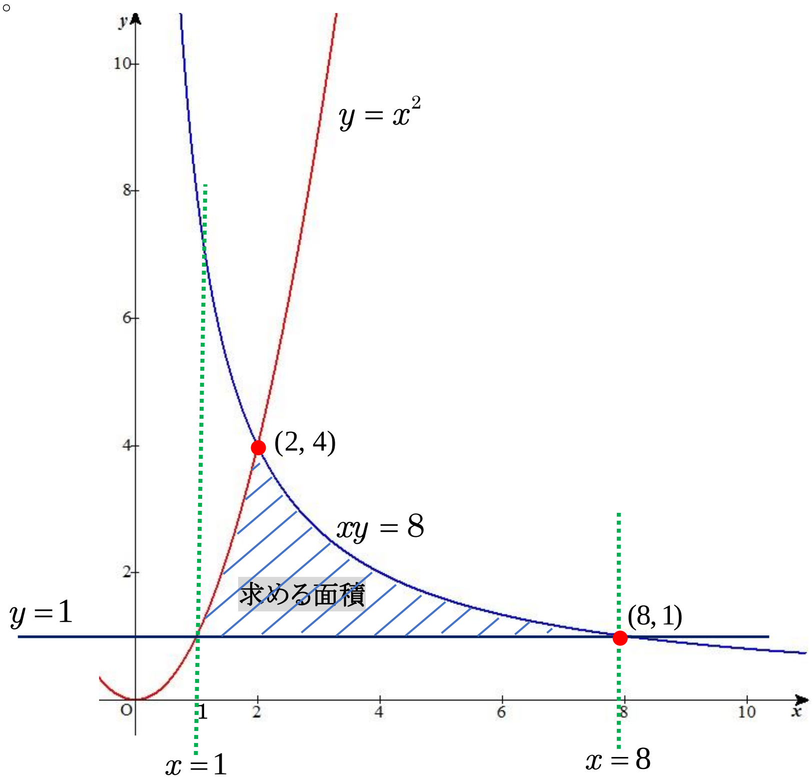


図１

■問題２（2020PAPER1）

a,b は２次方程式 $x^2+20x-2020=0$ の２つの実数解で，c,d は

２次方程式 $x^2-20x+2020=0$ の２つの虚数解とします。

このとき，$ac(a-c)+ad(a-d)+bc(b-c)+bd(b-d)$ の値を選びなさい。

（A）０　（B）8000　（C）8080　（D）16000

【正解】　（D）

＜解説＞

２次方程式の解と係数の関係を用いることはすぐ気づくでしょう。

ただし，この関係を式変形に効率よく結びつけるのが大切です。

a,b は２次方程式 $x^2+20x-2020=0$ の２つの実数解より，

$$a+b=-20,\quad ab=-2020 \qquad \cdots①$$

c,d は２次方程式 $x^2-20x+2020=0$ の２つの虚数解より，

$$c+d=20,\quad cd=2020 \qquad \cdots②$$

①と②より，a,b どうしの和と積，また c,d どうしの和と積に注目して変形すると，

$$\begin{aligned}
&ac(a-c)+ad(a-d)+bc(b-c)+bd(b-d)\\
&=a^2c-ac^2+a^2d-ad^2+b^2c-bc^2+b^2d-bd^2\\
&=a^2(c+d)+b^2(c+d)-c^2(a+b)-d^2(a+b)\\
&=(c+d)(a^2+b^2)-(a+b)(c^2+d^2)\\
&=(c+d)\{(a+b)^2-2ab\}-(a+b)\{(c+d)^2-2cd\}\\
&=20\{(-20)^2-2\times(-2020)\}-(-20)\{20^2-2\times2020\}\\
&=20(400+4040)+20(400-4040)\\
&=20\times800=16000
\end{aligned}$$

で求められます。

（２）タフな計算力を必要とする問題

（１）で紹介したような易しめレベルの出題数はわずかです。

実際はここで紹介する非常にタフな計算力を必要とする問題が頻出します。

■問題３（2019PAPER２）…　複数解答

非負の整数 n に対して

$$f(n)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}$$

を定義します。

$\cos^{-1}x$ が $[0,\pi]$ の値をとると仮定したとき，次の選択肢で正しいものを選びなさい。

（A）$\alpha=\tan(\cos^{-1}f(6))$ のとき，$\alpha+2\alpha-1=0$　　（B）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\frac{1}{2}$

（C）$f(4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\sin(7\cos^{-1}f(5))=0$

【正解】（A），（C），（D）

＜解説＞

かなり複雑に見える $f(n)$ の定義式ですが，意を決して変形してみましょう。

$$f(n)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{2k+3}{n+2}\pi\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1-\cos\frac{2k+2}{n+2}\pi\right)}$$

$$=\frac{(n+1)\cos\dfrac{\pi}{n+2}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{2k+3}{n+2}\pi}{(n+1)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{2k+2}{n+2}\pi}$$

ここで，上式の分子の第２項は三角関数の有限級数の公式（※）を用いて

$$\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{2k+3}{n+2}\pi=\cos\frac{3\pi}{n+2}+\cos\frac{5\pi}{n+2}+\cos\frac{7\pi}{n+2}+\cdots+\cos\frac{2n+3}{n+2}\pi$$

$$=\frac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi\cdot\cos\dfrac{n+3}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}$$

同様に，　分母の第２項も

$$\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{2k+2}{n+2}\pi=\cos\frac{2\pi}{n+2}+\cos\frac{4\pi}{n+2}+\cos\frac{6\pi}{n+2}+\cdots+\cos\frac{2n+2}{n+2}\pi$$

$$=\frac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi\cdot\cos\dfrac{n+2}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}=\frac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi\cdot\cos\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}=-\frac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}$$

これらの結果より，

$$f(n)=\frac{(n+1)\cos\dfrac{\pi}{n+2}-\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi\cdot\cos\dfrac{n+3}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}}{(n+1)+\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}}}=\frac{(n+1)\cos\dfrac{\pi}{n+2}+\cos\dfrac{\pi}{n+2}}{(n+1)+1}$$

最後の変形は，$\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{n+2}\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}} = \dfrac{\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{n+2}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n+2}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n+2}} = 1$　と

$\cos\dfrac{n+3}{n+2}\pi = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{n+2}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{n+2}$　を用いております。

よって，$f(n) = \dfrac{(n+2)\cos\dfrac{\pi}{n+2}}{n+2} = \cos\dfrac{\pi}{n+2}$　が得られます。

かなり複雑に見えた$f(n)$の定義式ですが，変形した結果は

$f(n) = \cos\dfrac{\pi}{n+2}$　と信じられないほどシンプルになります。

あとは選択肢の真偽を慎重に調べます。選択肢（A）から順番に見ていきましょう。

（A）　$\alpha = \tan(\cos^{-1} f(6)) = \tan\left(\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\right) = \tan\dfrac{\pi}{8}$

$\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{8}}$　より，$1 = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ を変形して

$\alpha + 2\alpha - 1 = 0$　となって，（A）は正しい。

（B）$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi}{n+2} = \cos 0 = 1$ より，（B）は正しくない。

（C）$f(4) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　より，（C）は正しい。

（D）$\sin(7\cos^{-1} f(5)) = \sin\left(7\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)\right) = \sin\left(7\times\dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0$ より，

（D）は正しい。

よって，（A），（C），（D）が正しいということになります。

（※）三角関数の有限級数の公式

$\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+2\alpha) + \cdots + \cos(x+n\alpha)$

$= \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha \cdot \cos\dfrac{2x+n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$　（$\alpha \neq 2m\pi$；mは整数）

■問題４（2020PAPER２）　…　複数回答

非負の整数s,rに対して，

$$\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if} \quad r \leqq s \\ 0 & \text{if } r > s \end{cases}$$

とします。

また，正の整数m,n，　また非負の整数pに対して

$$g(m,n) = \sum_{p=0}^{m+n} \frac{f(m,n,p)}{\begin{pmatrix} m+p \\ p \end{pmatrix}}, \quad f(m,n,p) = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+i \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+n \\ p-i \end{pmatrix}$$ を定義します。

このとき，次の選択肢で正しいものを選びなさい。

（A）すべての正の整数m,nに対して，$g(m,n) = g(n,m)$

（B）すべての正の整数m,nに対して，$g(m,n+1) = g(m+1,n)$

（C）すべての正の整数m,nに対して，$g(2m,2n) = 2g(m,n)$

（D）すべての正の整数m,nに対して，$g(2m,2n) = (g(m,n))^2$

【正解】（A），（B），（D）

＜解説＞

いわゆる二項係数を使った計算問題で，式変形がかなり面倒です。

また，二項係数に関する「Vandermonde の恒等式」が頭に入ってないと

正解までたどり着けないでしょう。

$$\begin{aligned} f(m,n,p) &= \sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot {}_{n+i}\mathrm{C}_p \cdot {}_{p+n}\mathrm{C}_{p-i} \\ &= \sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot \frac{\cancel{(n+i)!}}{p!(n+i-p)!} \cdot \frac{(p+n)!}{(p-i)!\cancel{(n+i)!}} \\ &= \sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot \frac{(n+p)!}{p!} \cdot \frac{1}{(n-p+i)!(p-i)!} = \sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot \frac{(n+p)!}{p!n!} \cdot \frac{n!}{(n-p+i)!(p-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot {}_{n+p}\mathrm{C}_p \cdot {}_n\mathrm{C}_{p-i} = \sum_{i=0}^{p} {}_{n+p}\mathrm{C}_p \cdot {}_m\mathrm{C}_i \cdot {}_n\mathrm{C}_{p-i} = {}_{n+p}\mathrm{C}_p \cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_p \end{aligned}$$

最後に，「Vandermonde の恒等式」：$\sum_{i=0}^{p} {}_m\mathrm{C}_i \cdot {}_n\mathrm{C}_{p-i} = {}_{m+n}\mathrm{C}_p$ を利用しています。

よって，

$$g(m,n) = \sum_{p=0}^{m+n} \frac{f(m,n,p)}{{}_{n+p}\mathrm{C}_p} = \sum_{p=0}^{m+n} \frac{\cancel{{}_{n+p}\mathrm{C}_p} \cdot {}_{m+n}\mathrm{C}_p}{\cancel{{}_{n+p}\mathrm{C}_p}} = \sum_{p=0}^{m+n} {}_{m+n}\mathrm{C}_p$$

$= (1+1)^{m+n} = 2^{m+n}$

が得られます。ここまで到達するのはかなり高いハードルと思います。

以降，（A）から選択肢の真偽の確認を行います。

（A） $g(m,n) = 2^{m+n} = 2^{n+m} = g(n,m)$ より，(A) は正しい。

（B） $g(m,n+1) = 2^{m+n+1} = 2^{m+1+n} = g(m+1,n)$ より，(B) も正しい。

（C） $g(2m,2n) = 2^{2m+2n} = 2^{2(m+n)}$，また

$2g(m,n) = 2\cdot 2^{m+n} = 2^{m+n+1}$ より，$g(2m,2n) \neq 2g(m,n)$

よって（C）は正しくない。

（D） $g(2m,2n) = 2^{2(m+n)} = \left(2^{m+n}\right)^2 = (g(m,n))^2$ より，(D) は正しい。

よって（A），（B），（D）が正しいということになります。

（３）グラフ描画力を必要とする問題

JEE Advanced では計算機やグラフ電卓は使用できませんので，グラフや図形を紙上にできるだけ正確にかつスピーディーに描く能力が要求される問題が登場します。

■問題５（2019PAPER２）…　複数解答

$f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{x^2}$，　$x > 0$　を定義し，

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$を，$f(x)$ が極大になる x 軸上の点とし，

$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < x_n < \cdots$を，$f(x)$ の極小になる x 軸上の点とするとき，正しい選択肢を選びなさい。

（A）あらゆる n に対して，$|x_n - y_n| > 1$

（B）$x_1 < y_1$

（C）あらゆる n に対して，$x_n \in \left(2n, 2n+\dfrac{1}{2}\right)$

（D）あらゆる n に対して，$x_{n+1} - x_n > 2$

【正解】　（A），（C），（D）

＜解説＞

$f'(x) = 0$ となる零点前後の符号を瞬時に求め、$y = f(x)$ のグラフを短時間にできるだけ正確に描く必要があります。$y = f(x)$ の導関数 $y = f'(x)$ を求めると

$$f'(x)=\frac{\pi\cos\pi x\cdot x^2-2x\sin\pi x}{x^4}$$

$$=\frac{2x\cos\pi x\left(\dfrac{\pi x}{2}-\tan\pi x\right)}{x^4}=\frac{2\cos\pi x\left(\dfrac{\pi x}{2}-\tan\pi x\right)}{x^3}$$

$x>0$ において，　上式の分子にある $\cos\pi x$　と　$\dfrac{\pi}{2}x-\tan\pi x$ の符号より

グラフを図２のようにできるだけ正確に描けるかがポイントです。計算能力とは別のグラフ描画力が要求されるでしょう。

グラフより，　$y=f(x)$ が極大となる x 座標（$x_1,x_2,x_3,\cdots$），　極小となる x 座標（$y_1,y_2,y_3,\cdots$）はそれぞれ，

$$\begin{cases} 2<x_1<\dfrac{5}{2},\quad 4<x_2<\dfrac{9}{2},\cdots\quad ,\quad \text{すなわち，}\quad x_n\in\left(2n,2n+\dfrac{1}{2}\right),\quad n=1,2,3,\cdots \\ 1<y_1<\dfrac{3}{2},\quad 3<y_2<\dfrac{7}{2},\cdots\quad ,\quad \text{すなわち，}\quad y_n\in\left(2n-1,2n-\dfrac{1}{2}\right),\quad n=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

となって，（B）を除き，（A），（C），（D）が正しいことがわかります。

ただし，（D）の真偽の判断はかなり微妙なところでしょう。

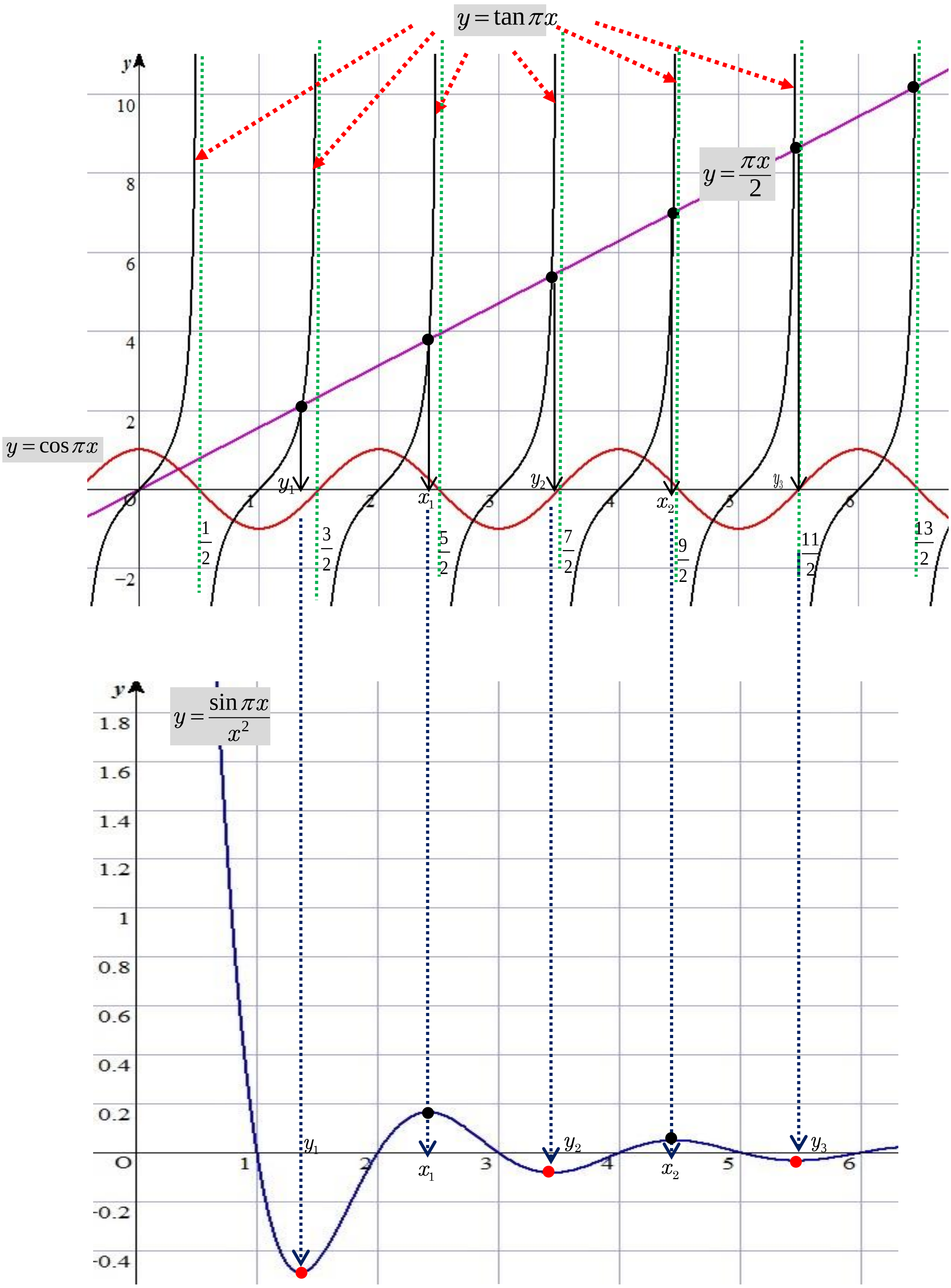


図 2

■問題６（2020PAPER２）　…　数値（numerical value）で解答

２つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を以下のように定義します。

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad f(x)=|2x-1|+|2x+1|$$

$$\mathrm{g}:(-1,1)\to(-1,1),\quad g(x)=x-[x]$$

ここで、$\left[x\right]$ は x を超えない最も大きい整数を表し，$f\circ g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ は $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ で定義される合成関数です。

c は，　開区間（－１，１）で　$f\circ g$ が不連続な点の個数を，

d は，　開区間（－１，１）で $f\circ g$ が微分不可能な点の個数を表すとき，

$c+d$ の値を求めなさい。

【正解】４

＜解説＞

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$，　$g(x)=x-[x]$　より，

$f(g(x))=|2(x-[x])-1|+|2(x-[x])+1|$

$g(x)=x-[x]$ は，$0\leqq g(x)<1$ であることに注意すると（図３参照），

（ｉ）$\dfrac{1}{2}\leqq g(x)<1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2}\leqq x<1$　または　$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$

$$\Leftrightarrow\quad f(g(x))=2(x-[x])-1+2(x-[x])+1=4(x-[x])$$

なお，$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ で，$f(g(x))=4(x-0)=4x$，

$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ で，$f(g(x))=4(x-(-1))=4x+4$　となる。

（ⅱ）$0\leqq g(x)<\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqq x<\dfrac{1}{2}$　または　$-1\leqq x<-\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad f(g(x))=-2(\cancel{x-[x]})+1+2(\cancel{x-[x]})+1=2$$　■

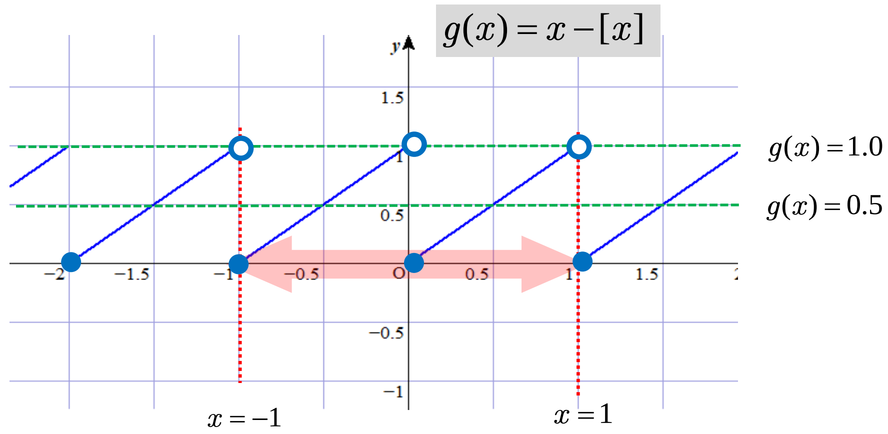


図 3

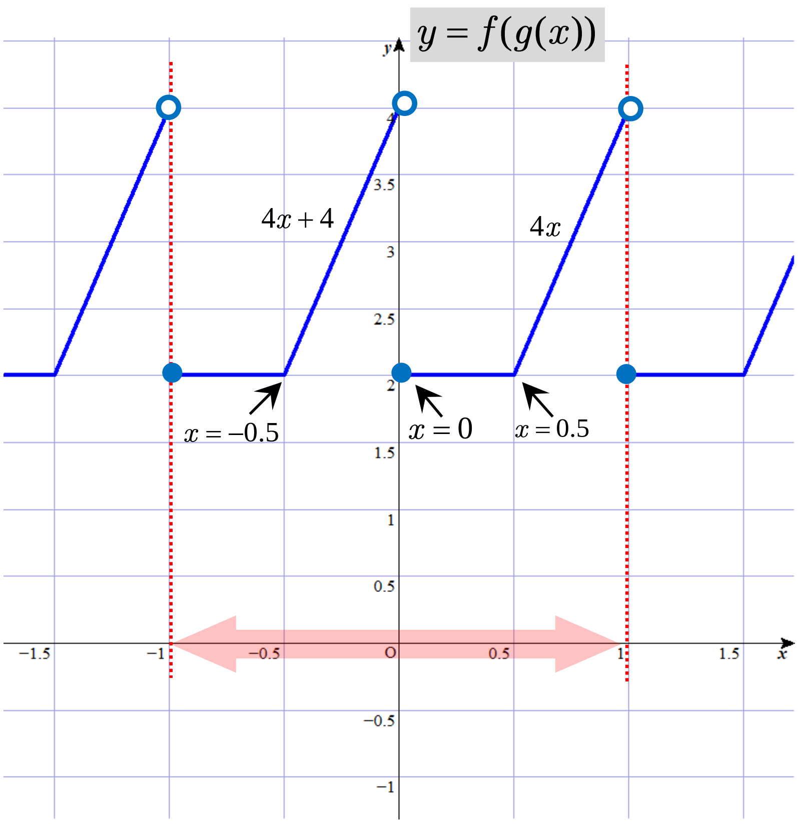


図 4

図 4 より，

　$x=0$ で不連続より，$c=1$

　また，$x=-0.5$,　0,　0.5 で微分不可能より，$d=3$

よって，$c+d=1+3=4$　が得られます。

（４）証明力を必要とする問題

証明力を必要とする問題といえば，記述式の問題をイメージしますが，
JEE Advanced ではマークシート式で，証明力を要求する問題も出題されます。

■問題７（2020PAPER２）　…　複数解答

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，　$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　は，$x,y\in\mathbb{R}$ において

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$，　$f(x)=xg(x)$　を満たしています。

もし，$\lim_{x\to 0} g(x)=1$ ならば，次の選択肢で正しいものを選んでください。

（A）f は，あらゆる $x\in\mathbb{R}$ で微分可能である。

（B）$g(0)=1$ ならば，g はあらゆる $x\in\mathbb{R}$ で微分可能である。

（C）微分係数 $f'(1)=1$ である。

（D）微分係数 $f'(0)=1$ である。

【正解】（A），（B），（D）

＜解説＞

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)+f(x)f(h)-\cancel{f(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}(1+f(x))=1+f(x)\qquad\left(\because \lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\right)$$ より，

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)}=1$$ となります。

微分方程式を解くと，$\int\frac{f'(x)}{1+f(x)}dx=\int dx$　より

$\log_e|1+f(x))|=x+c$，　$1+f(x)=Ce^x$

$f(x)=Ce^x-1$　（C,c ：定数）　…①

さて，$f(x)=xg(x)$　より、$f(0)=0\cdot g(0)=0$　となるので

$f(0)=C-1=0$，　$C=1$　と定まります。

①より $f(x)=e^x-1$，　$f'(x)=e^x$　より　（A）は正しい。

また，$f'(0)=1$ より，（D）も正しい。

しかし，$f'(1)=e$ なので，（C）は正しくありません。

残りの選択肢は（B）だけです。

$g(x)=\frac{f(x)}{x}$ より，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-1}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

ならば，$x=0$ における微分係数が求められるかを調べると

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^h-1}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1+\dfrac{h}{2}+O(h^2)-1}{h}-1}{h}$$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{2}+O(h)\right)=\dfrac{1}{2}$ より $x=0$ で微分可能であることがわかります。

$x\neq 0$ において $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ は，$g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ と微分可能なので，

（B）は正しい。

（５）ユニークな問題

ここでは，日本の大学の数学入試問題ではお目にかかることの少ないユニークな問題を２問ほど紹介します。

■問題８（2019PAPER１）…　数値（numerical value）で解答

３×３行列の集合 S を考えます。ただし，その行列の成分は０か１です。

また，事象 E_1, E_2 は，

$E_1=\{A\in S: |A|=0\}$，　ここで $|A|$ は行列 A の行列式を表します。

$E_2=\{A\in S:$ 行列Aの全成分の和は$7\}$

とします。行列を S からランダムに選び出すとき，条件付き確率 $P(E_1|E_2)$ の値を求めなさい。

【正解】　０．５

＜解説＞

確率と行列の融合問題で，さらに集合の考え方も含まれ，日本ではあまりお目にかかれないユニークな良問です。$P(E_1|E_2)$ を求めるとは，行列 A の全成分の和が７のとき，$|A|$＝０となる確率を求めることです。

さて，行列 A の全ての成分（０or１）の和が７とは９個の成分のうち，

１が７個で，残り２個が０，例えば $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ などです。

これらは，$n(E_2)={}_9C_7\times{}_2C_2=\dfrac{9\times8}{2}=36$通りつくれます。

１が７個，０が２個の状況下で，$|A|=0$となる場合の数を考えます。
$|A|=0$とは，以下のように，Aにおける２つの行もしくは２つの列が等しい場合です。

（ｉ）２つの行が等しい場合

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}$$

${}_3C_2=3$通り

$\dfrac{3!}{2!\cdot1!}=3$通り

$3\times3=9$通り

（ⅱ）２つの列が等しい場合

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

${}_3C_2=3$ 通り

$\dfrac{3!}{2!\cdot1!}=3$ 通り

$3\times3=9$通り

（ｉ）と（ⅱ）を合わせて

$n(E_1\cap E_2)=18$通り

よって，求める条件付き確率は，$P(E_1\,|\,E_2)=\dfrac{n(E_1\,|\,E_2)}{n(E_2)}=\dfrac{18}{36}=0.5$

となります。

■問題９（2019PAPER１）… 数値（numerical value）で解答

$AP(a;d)$は、初項a，公差dの等差数列の集合を表すとします。もし

$$AP(1;3)\cap AP(2;5)\cap AP(3;7)=AP(a;d)$$

を満たす$AP(a;d)$ を考えるとき，$a+d$の値を求めなさい。

【正解】 157

＜解説＞

数学記号に惑わされないよう注意してください。

$AP(1;3)$は，{1，4，7，10，13，16，19，…} で，$AP_l(1;3)=1+3(l-1)=3l-2$

また，$AP(2;5)$は、{2，7，12，17，22，27，…} で，$AP_m(2;5)=2+5(m-1)=5m-3$

$AP(3,7)$は、{3，10，17，24，31，38，…} で，$AP_n(3,7)=3+7(n-1)=7n-4$

とそれぞれ表すことができます。ただし，l,m,nは正の整数（i.e.自然数）です。

この３つの等差数列の共通部分を求めてみます。上式より，

$$3l-2=5m-3=7n-4$$

を満たす l,m,n の関係式より初項 a を求めてみます。

$3l-2=5m-3$ より，$3l-5m=-1$ …①

$5m-3=7n-4$ より，$5m-7n=-1$ …②

②より $m=\dfrac{7n-1}{5}$ を①に代入して，$l=\dfrac{7n-2}{3}$

$m=\dfrac{7n-1}{5}$ と $l=\dfrac{7n-2}{3}$ より，$n=1,2,3,\cdots$ において，m,l が整数になるのは

$n=8$ のとき $m=11$，$l=18$ で，このとき

$AP_{18}(1;3)=54-2=52$，$AP_{11}(2;5)=55-3=52$，$AP_{8}(3;7)=56-4=52$

となって，これが３つの等差数列の共通部分の初項 $a=52$ になります。

また，公差 d は３つの等差数列それぞれの公差３，５，７の最小公倍数 105 より，

$d=105$ が求まります。

すなわち，共通部分からなる数列は $AP(52;105)=52,157,262,367,\cdots$ となり，

よって，$a+d=157$ が得られます。

３．まとめ・結語

インド工科大学においては，毎年 100 万人近い受験者から１万人ほどに絞り込む必要があるため，本論文でも紹介したように JEE Advanced 問題の難易度はかなり高くなっています。

JEE Advanced では，複雑な計算などを紙と鉛筆（ペン）だけで行い，短時間に正解を見つけ出す驚異的な能力が要求されます。つまり，難易度の高い問題を短時間に正確にかつスピーディーに解けるテクニックがカギとなります。その意味では日本の大学入試センター試験（2021 年以降，共通テスト）と似ております。膨大な受験者数から選抜するためには，この受験システムによって受験者の能力を判断せざるを得ないかもしれません。

今後，IIT における数学入試問題の調査・報告を継続しながら，大学受験で鍛えた短時間で問題解答をこなす卓越した能力を大学卒業後にどう開花させ，インド社会のトップ層でどのように活躍していくのか，インド工科大学入学後の教育内容も調査してみたいと考えております。

引用・参考文献

＜書籍＞

［１］ 出題者心理から見た入試数学　芳沢光雄著　ブルーバックス（講談社）2008 年

＜ネット関連＞

［２］ JEE　Adanced　2020　PAPER1（数学）
https://drive.google.com/file/d/1ZLEUiAiHTkvAjmM8bFScsbo_J_m_LBRL/view

［３］ JEE　Adanced　2020　 PAPER2（数学）
https://drive.google.com/file/d/15GjVAeiWVcHEud4SphQKOXq1u5uKTeIp/view

［４］ JEE　Adanced　2019　PAPER1（物理，化学，数学）
https://admission.aglasem.com/jee-advanced-2019-question-paper-answers/#JEE_Advanced_2019_Paper_1_Question_Paper

［５］ JEE　Adanced　2019　PAPER2（物理，化学，数学）
https://admission.aglasem.com/jee-advanced-2019-question-paper-answers/#JEE_Advanced_2019_Paper_2_Question_Paper

２次方程式の解答から見えてくるもの

学習数学研究所
穂積　悠樹

要約

数検３級の１次：計算技能検定では、これまで必ず(19)、(20)に２次方程式の問題を出題してきた。(19)では $b=0$（x の係数が 0）の形、または係数が整数の範囲で因数分解できる形の問題を出題し、(20)では解の公式を使うと早く解ける形の問題を出題してきたのであるが、難易度が低いはずの(19)のほうが正答達成率も低くなるという珍しい現象もよく見られた。もしかしたら $b=0$（x の係数が 0）の形の問題であっても解の公式を使い、そのために正答達成率が低くなっているのではないかと思い、受検者の２次方程式の解答を調査するに至った。

キーワード：「$b=0$ 型」、「因数分解型」、「解の公式型」

１．数検と受検者層、その他注意点

① 数検３級では中３の範囲が出題されるが、誰でも受検できる。ただし、時期にもよるが、年間を通して約７割の受検者が中３である。とくに２学期は中３の受検者が増えるため、正答達成率も高くなりやすい。

② 数検の受検者は数学が好き、得意な人が多い。そのため、学力調査などと比較すると正答達成率は高めである。

③ 数検は記述式の検定であるが、３級１次：計算技能検定の解答方法はすべて、答えだけを書く（途中式は不要）ことになっている。

④ ３級１次検定は○（１点）か×（０点）で採点している（部分点なし）。

⑤ 同一回の(19)と(20)の問題は、同一受検者が解いている。

⑥ 別目的の調査のため、まったく同じ問題が出題されているものもある。

⑦ 2020 年度に実施された検定(18 回分)をすべて調査した。４月の検定はコロナの影響で中止となった。５月と６月に実施された第 354 回と 355 回の検定もコロナの影響が響き、受検者数はかなり少なくなったものの、調査結果に影響が出なかったため、調査対象に含めている。

２．2020 年度の３級１次に出題した２次方程式の問題と正答達成率

要約でも触れたが、数検３級の１次：計算技能検定では、(19)で $b=0$（x の係数が 0）の形、または $b\neq0$ だが中３の範囲で因数分解できる形の問題を出題し、(20)では解の公式を使うと早く解ける形の問題を出題してきた。これらを便宜上、順に「$b=0$ 型」、「因数分解型」、「解の公式型」と名付けることとして、(19)を「$b=0$ 型」と「因数分解型」に分けて(20)の「解の公

式型」と比較すると、次のようになった。

(19)が「$b=0$ 型」、(20)が「解の公式型」の正答達成率

回次	小問(19) ($b=0$ 型)	(19)の正答 達成率(%)	小問(20) (解の公式型)	(20)の正答 達成率(%)	受検者 数(人)
第 370 回(2 月)	$4x^2-32=0$	42.5	$3x^2+2x-2=0$	46.2	4399
第 369 回(2 月)	$64x^2-19=0$	22.3	$3x^2+4x-1=0$	32.7	1496
第 367 回(12 月)	$9x^2-7=0$	53.3	$x^2+6x-3=0$	76.3	7256
第 366 回(11 月)	$2x^2=32$	69.2	$3x^2+2x-6=0$	60.7	7200
第 365 回(11 月)	$x^2-50=0$	64.3	$3x^2+4x=2$	61.0	4383
第 364 回(10 月)	$6x^2-72=0$	68.6	$x^2-6x+4=0$	77.3	4803
第 363 回(10 月)	$4x^2-7=0$	55.0	$x^2-3x-5=0$	78.0	4935
第 362 回(10 月)	$9x^2=7$	55.8	$x^2+5x-2=0$	77.6	6556
第 361 回(9 月)	$2x^2-16=0$	67.1	$2x^2+5x+1=0$	82.3	2571
第 358 回(7 月)	$5x^2-80=0$	53.3	$3x^2-5x+1=0$	62.3	4584
第 357 回(7 月)	$9x^2-28=0$	28.2	$x^2-6x+7=0$	42.5	1817
第 355 回(6 月)	$x^2-27=0$	40.4	$2x^2-x-2=0$	45.6	171
第 354 回(5 月)	$4x^2-5=0$	38.4	$x^2-4x-13=0$	52.5	395

(19)が「因数分解型」、(20)が「解の公式型」の正答達成率

回次	小問(19) (因数分解型)	(19)の正答 達成率(%)	小問(20) (解の公式型)	(20)の正答 達成率(%)	受検者 数(人)
第 371 回(3 月)	$x^2+7x+12=0$	61.7	$2x^2-8x+5=0$	41.9	2485
第 368 回(1 月)	$x^2+2x-15=0$	68.1	$2x^2+3x-3=0$	62.1	2108
第 360 回(8 月)	$x^2-3x-28=0$	79.6	$2x^2+8x-5=0$	52.4	5476
第 359 回(8 月)	$x^2+6x-16=0$	76.9	$2x^2+5x+1=0$	71.4	5644
第 356 回(6 月)	$x^2-14x+49=0$	75.0	$3x^2-5x+1=0$	60.7	2242

※網掛は、(19)と(20)を比較して正答達成率が高かったほうを示している。
※別調査の目的で同一の問題を出題している回がある。

このことから、次のことがいえる。

・「因数分解型」は「解の公式型」よりも正答達成率が高い。
・(２回だけ例外はあるが)「$b=0$ 型」は「解の公式型」よりも正答達成率が低い。

これらの原因を突き止めていくことにする。

３．正答達成率と無答率

「b＝0 型」は「解の公式型」よりも正答達成率が低いからといって、純粋に「b＝0 型」のほうが難易度が高いということはできない。おそらくは多くの人たちが「解の公式型」のほうが難しいと感じていると思われる。そこで、無答率で比較してみることにする。無答率とは、解答欄に何も書かなかったものの割合で、諦めやすさや難易度の指標になりうるものである。

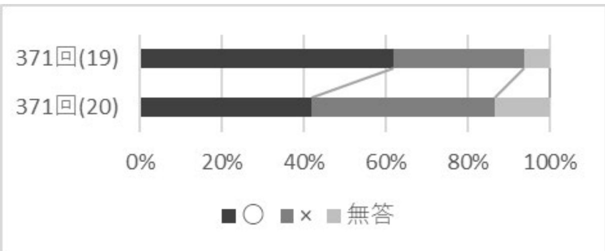
まずは(19)で「因数分解型」、(20)で「解の公式型」を出題した５回分の無答率を、次の表にまとめた。

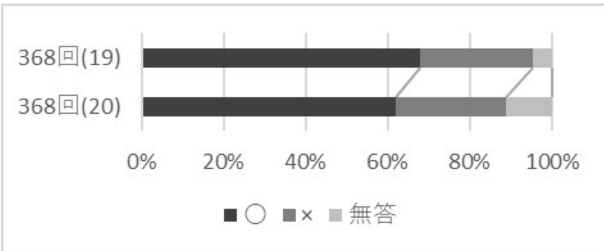
(19)が「因数分解型」、(20)が「解の公式型」の無答率

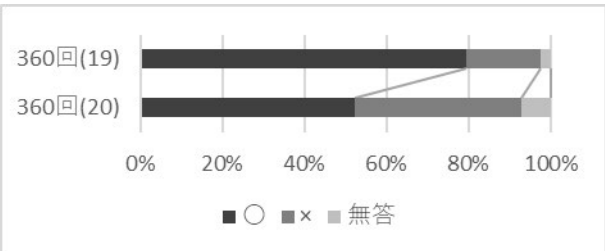
回次	(19)の無答数	(19)の無答率	(20)の無答数	(20)の無答率	受検者数（人）
第 371 回(3 月)	155	6.2%	335	13.5%	2485
第 368 回(1 月)	96	4.6%	233	11.1%	2108
第 360 回(8 月)	122	2.2%	382	7.0%	5476
第 359 回(8 月)	155	2.7%	499	8.8%	5644
第 356 回(6 月)	96	4.3%	287	12.8%	2242

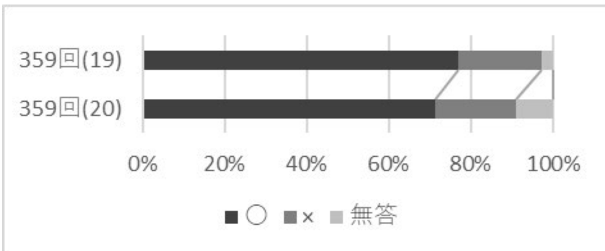
※網掛は、(19)と(20)を比較して無答率が高かったほうを示している。

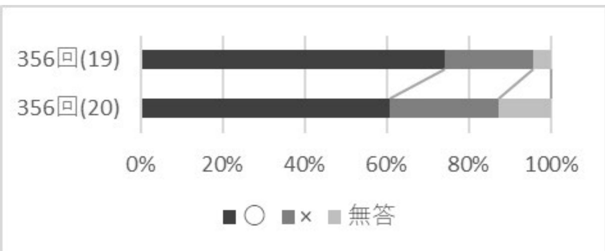
５回とも(20)のほうが無答率が高いことがわかった。上の表について、正答達成率や無答率を帯グラフで表すと、下のようになる。











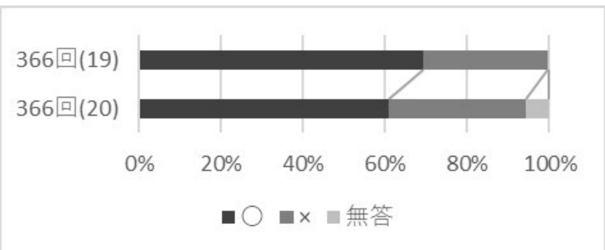
一般的に、難易度に差がある問題を比較すると易しい問題のほうが正答達成率は高くなり、無答率は低くなる傾向がある。この場合、(19)のほうが(20)よりも易しいといえ、区分線の傾きが２本とも正の向きとなる（傾きが正という表現は１次関数になぞらえている)。一方、(19)で「$b=0$ 型」、(20)で「解の公式型」を出題した 13 回分の無答率はどうなっていたかというと、次の表にまとめたとおりである。

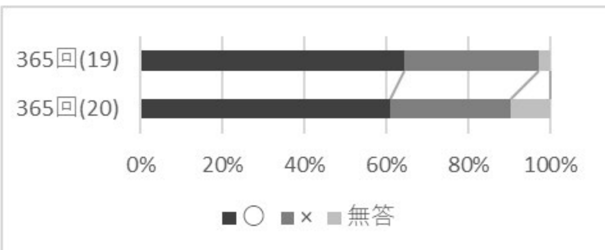
(19)が「$b=0$ 型」、(20)が「解の公式型」の無答率

回次	(19)の無答数	(19)の無答率	(20)の無答数	(20)の無答率	受検者数（人）
第 370 回(2 月)	141	3.2	629	14.3	4399
第 369 回(2 月)	367	24.5	388	25.9	1496
第 367 回(12 月)	157	2.2	247	3.4	7256
第 366 回(11 月)	42	0.6	412	5.7	7200
第 365 回(11 月)	119	2.7	432	9.9	4383
第 364 回(10 月)	79	1.6	211	4.2	4803
第 363 回(10 月)	216	4.4	371	7.5	4935
第 362 回(10 月)	153	2.3	345	5.3	6556
第 361 回(9 月)	37	1.4	118	4.6	2571
第 358 回(7 月)	98	2.1	544	11.9	4584
第 357 回(7 月)	190	10.5	209	11.5	1817
第 355 回(6 月)	19	11.1	43	25.1	171
第 354 回(5 月)	28	7.0	53	13.3	395

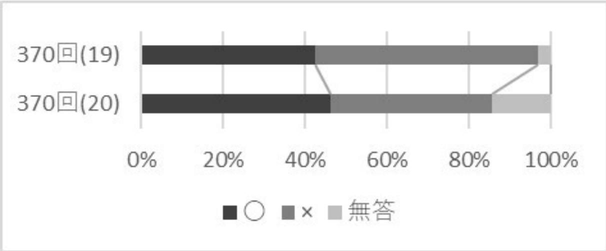
※網掛は、(19)と(20)を比較して無答率が高かったほうを示している。

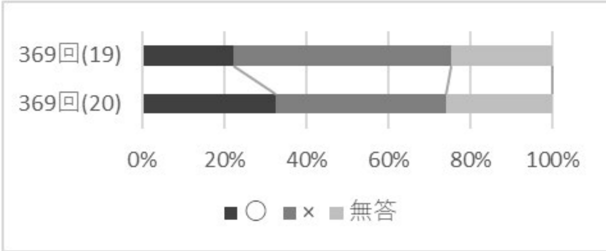
こちらも前ページと同様にすべての回において、(20)のほうが無答率が高いことがわかった。
(19)のほうが正答達成率が高かった第 366 回と第 365 回について、正答達成率や無答率を帯グラフで表すと、下のようになる。

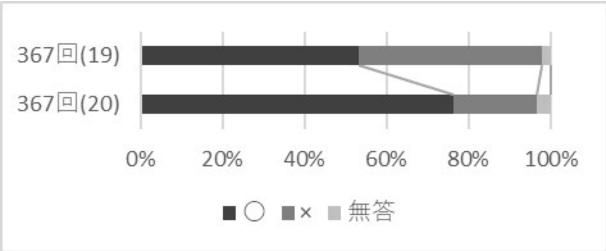


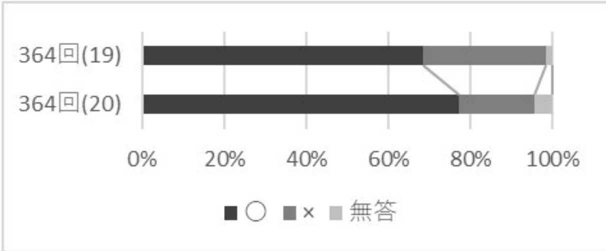


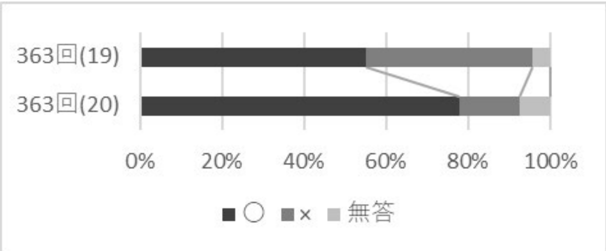
これらも前ページのグラフと同様に、区分線の傾きが２本とも正の向きとなっている。
しかし、第 366 回と第 365 回以外の帯グラフは、次ページのようになる。

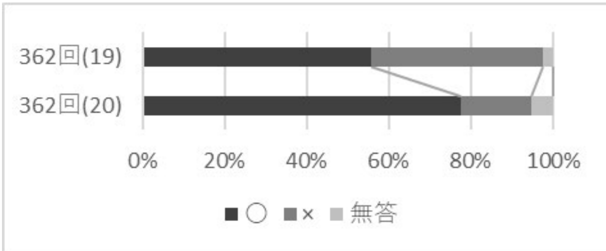


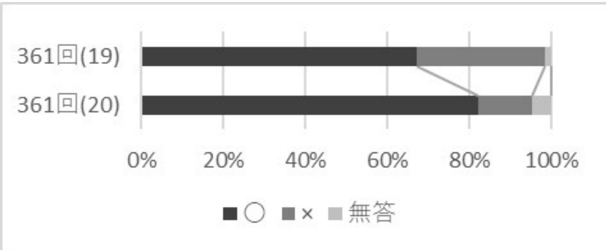


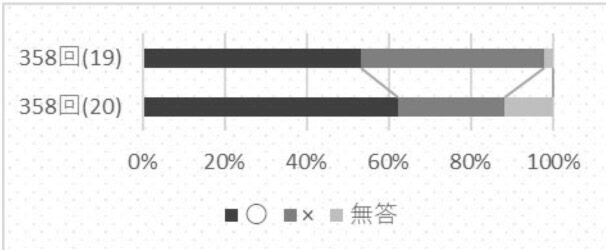


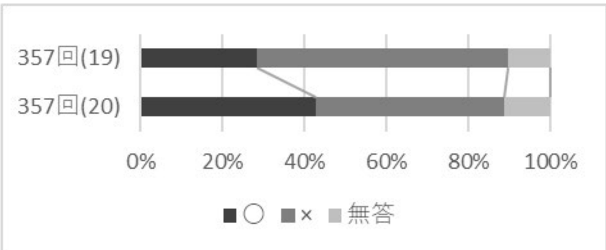


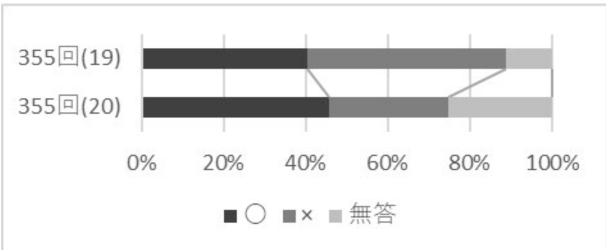


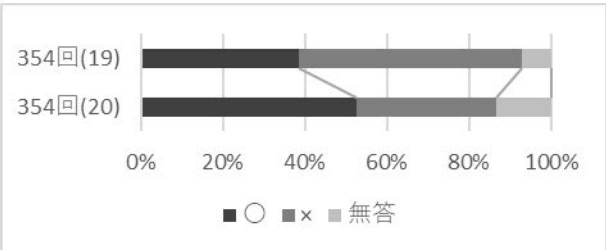












区分線の傾きが正の向きと負の向きであるものが１本ずつあることがわかる。基本的にこのようなグラフができることは稀である。

なぜ「b＝0型」と「解の公式型」では、「b＝0型」のほうが無答率は高いのに正答達成率が低いのかというと、「b＝0型」には多くの人が陥りやすいミスが存在する可能性があるということがいえる。易しい問題だと思って取りかかるものの、多くの人が引っかかってしまっているというものである。そこで、2020年度に実施した実用数学技能検定３級１次(19)(20)の２次方程式の問題において、受検者が書いた答えをすべて調査することにした。

４．「b＝0型」でよく見られた誤答とは

すべての誤答を調べた結果、予想とは異なり、解の公式を使って解いたような形跡は１件も見当たらなかった。代わりに、絶対値は正しいものの答えに「±」を付けていない解答が圧倒的に多かったことがわかった。つまり、正と負の２つある解のうち、１つの解のみを答えた人が誤答の多くを占めていたのである。回によってその割合は大きく変わるが、次のような結果となった。

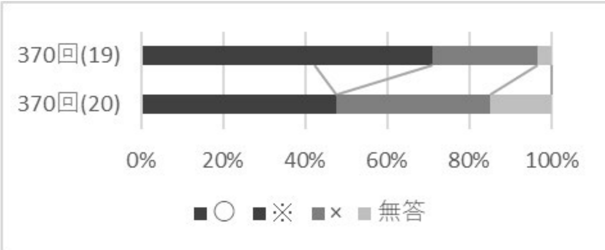
「b＝0型」で２解のうち１解のみ答えたものの解答数と割合

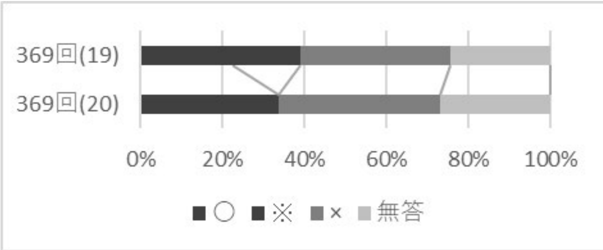
（[　　] 内の数はそのうち負の解を答えたもの）

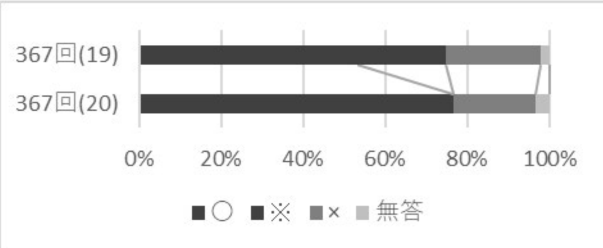
回次	該当する解答数	割合(%) (分母が全受検者数)	割合(%) (分母が誤答数)
第370回(2月)	1264 [14]	28.7 [0.3]	52.9 [0.6]
第369回(2月)	232 [8]	15.5 [0.5]	29.2 [1.0]
第367回(12月)	1552 [56]	21.4 [0.8]	48.0 [1.7]
第366回(11月)	1731 [3]	24.0 [0.0]	79.4 [0.1]
第365回(11月)	937 [8]	21.4 [0.2]	64.8 [0.6]
第364回(10月)	746 [30]	15.5 [0.6]	52.2 [2.1]
第363回(10月)	823 [38]	16.7 [0.8]	41.0 [1.9]
第362回(10月)	1294 [10]	19.7 [0.2]	47.2 [0.4]
第361回(9月)	395 [9]	15.4 [0.4]	48.8 [1.1]
第358回(7月)	1576 [17]	34.4 [0.4]	77.1 [0.8]
第357回(7月)	396 [6]	15.5 [0.6]	52.2 [2.1]
第355回(6月)	46 [0]	26.9 [0.0]	55.4 [0.0]
第354回(5月)	76 [2]	19.1 [0.5]	35.0 [0.9]

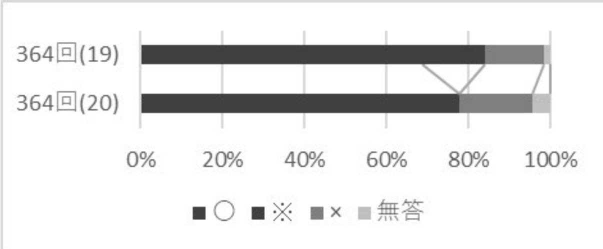
この結果より、「b＝0型」の問題において「±」を付けていなかったために不正解となったものの解答数は、誤答の中の半数以上(54%)を占めていたことがわかった。

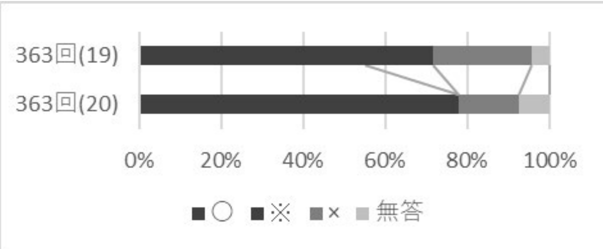
仮に受検者全員がきちんと「±」を付けていた場合、前ページの帯グラフがどのようになっていたのかというと、次ページのとおりである(グラフ中の「※」は上記の表の割合)。

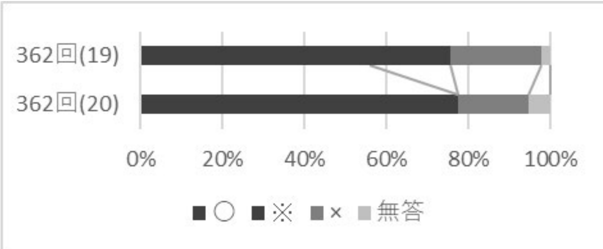


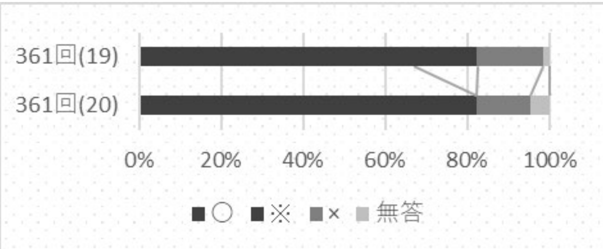


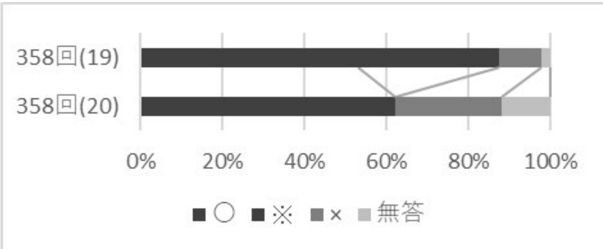


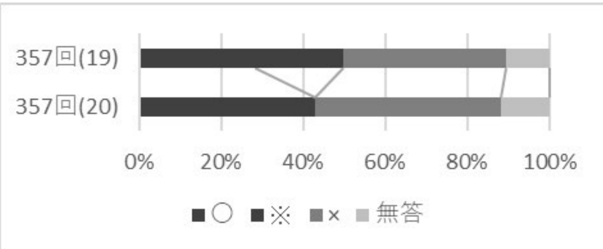


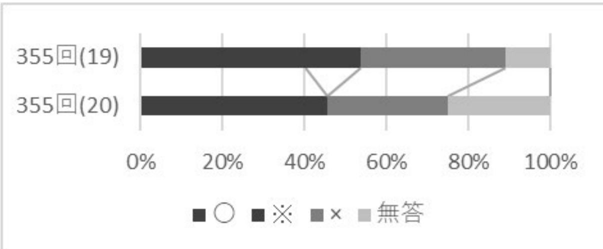


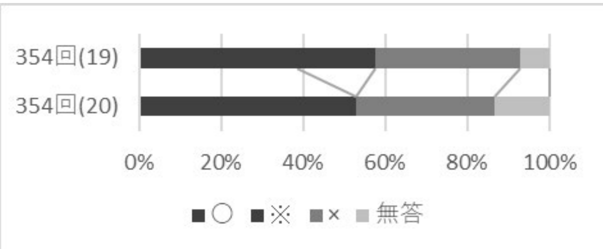












第 367 回、第 363 回、第 362 回の３回分を除き、多くの回で区分線の傾きが２本とも正の向きになっていたことがわかる。

５．「因数分解型」でよく見られた誤答とは

「因数分解型」ではどのような誤答が多かったのかを調べたところ、解の公式の形で終わってしまっている解答がもっとも多いことがわかった。おそらくはその先の計算方法がわからなかったものと思われる。一例を挙げると、次のようなものである。

＜第 371 回３級１次(19)＞

$x^2+7x+12=0$　　（正答達成率　61.7%）

（無答率　6.2%）

・計算途中の形で答えた解答

$(x=)\ \dfrac{-7\pm\sqrt{1}}{2}$　　（出現率　7.2%）

$(x=)\ \dfrac{-7\pm 1}{2}$　　（出現率　1.5%）

２次方程式の左辺が因数分解できる形(右辺は 0)であっても、解の公式を使って解いている人がそれなりにいたことがわかる。「$b=0$ 型」では解の公式を使って解いたような形跡が一切見られなかったため、「$b=0$ 型」の問題は２次方程式だと認識していない可能性があることもこの時点で判明した。ただし、解の公式を使っても、最終的な答えまで辿り着いた人もいると思われるため、この問題で解の公式を使って解こうとした人がどのくらいいたのかまではわからない。では「因数分解型」で、上記の例にあったような計算の途中の形で終わっている解答がどのくらいあるのかというと、それは下の表に示すとおりである。これは解の公式を正しく使えたものをカウントしたものであり、それに加えて符号ミスなどの誤りがあったものはカウントしていない。

「因数分解型」で計算の途中の形で終わっている解答数と割合

（[　　] 内の数はそのうち根号を外したもの）

回次	該当する解答数	割合(%) (分母が全受検者数)	割合(%) (分母が誤答数)
第 371 回(3 月)	215 [37]	8.7 [1.5]	27.0 [4.6]
第 368 回(1 月)	41 [3]	1.9 [0.1]	7.1 [0.5]
第 360 回(8 月)	199 [87]	3.6 [1.6]	20.0 [8.7]
第 359 回(8 月)	148 [135]	2.6 [2.4]	12.9 [11.7]
第 356 回(6 月)	0 [0]	0.0 [0.0]	0.0 [0.0]

「因数分解型」で解の公式を使ったものの計算の途中で終わっている解答は、回または問題によってその出現率は大きく変わるようであるが、2020 年度のすべての誤答に目を通した感想から、「±」の意味が理解できていない(何かの記号だと思っている)ように思えた。

また、特筆すべきは、第356回では計算の途中で終わっている解答が０件だったことである(解の公式を使ったものの符号ミスがあったものをカウントすると２件)。では第356回ではどういった問題が出題されていたのかというと、2020年度では唯一重解となる問題で、このときのもっとも多かった誤答は何だったのかというと、下のように答えの符号が逆だったものである。

＜第356回３級１次(19)＞

$x^2-14x+49=0$　　(正答達成率　75.0%)　(無答率　4.3%)

・符号が逆だった解答

$(x=)-7$　　(出現率　3.5%)

実は、因数分解型では計算途中の形のほかにもこのような符号が逆になっている解答もよく見られるのである。では「因数分解型」で、答えの符号が逆だった解答がどのくらいあったのかというと、それは下の表に示すとおりである。

「因数分解型」で答えの符号が逆だった解答数と割合

回次	該当する解答数	割合(%) (分母が全受検者数)	割合(%) (分母が誤答数)
第371回(3月)	53	2.1	6.7
第368回(1月)	43	2.0	7.5
第360回(8月)	88	1.6	8.8
第359回(8月)	124	2.2	10.8
第356回(6月)	78	3.5	16.8

符号が逆になってしまうのは、２次方程式の問題の左辺を因数分解した直後(右辺は０)に、答えに飛んでしまっているからである。教科書には、ある２次方程式の問題がたとえば

$$(x-p)(x+q)=0$$

と変形できたとして、その直下に

$$x-p=0 \quad \text{または} \quad x+q=0$$

という一行が載っている。この一行をしばらく(慣れるまで)は必ず書き続けることが大切だろう。また、自身で求めた整数解を与式に代入して、解が成り立つかどうかを確認する習慣がつくとなおよいし、是非ともそのようにしてほしいとも思う。

ところで「因数分解型」には、これらの他にもよく見られた間違いがあった。それは２つある解のうち、１つの解のみを答えているといったものである。

具体的には次のようなものである。

<第 371 回３級１次(19)>

$x^2+7x+12=0$　（正答達成率　61.7%）

（無答率　6.2%）

・解を１つのみ答えた解答

（x＝）−3　（出現率　4.0%）

（x＝）−4　（出現率　1.3%）

2020 年度の３級１次検定では、２解とも正の整数となるような問題は出題されていないが、どうやら 2020 年度の３級１次検定に出題された「因数分解型」の問題においては、２解のうち大きいほうの解のみを答える人が多いということもわかった。このことから、解を１つだけ答えている人は、与式に整数を当てはめていって解を見つけているのではないかと予想されるものの、その真意は不明である。なぜならば、符号が逆の解が１つだけ書かれた解答も、数は少ないものの毎回それなりに見られるからである。

では「因数分解型」で、２つある解のうち１つの解のみを答えている解答がどのくらいあったのかというと、それは下の表に示すとおりである。ちなみに第 356 回は重解となる問題であるので、該当する解答数は０としている。

「因数分解型」で２つある解のうち１つの解のみを答えている解答数と割合

（[　　] 内の数はそのうち小さいほうの解を答えたもの）

回次	該当する解答数	割合(%) (分母が全受検者数)	割合(%) (分母が誤答数)
第 371 回(3 月)	132 [32]	5.3 [1.3]	16.6 [4.0]
第 368 回(1 月)	129 [10]	6.1 [0.5]	22.4 [1.7]
第 360 回(8 月)	167 [24]	3.0 [0.4]	16.8 [2.4]
第 359 回(8 月)	242 [21]	4.3 [0.4]	21.0 [1.8]
第 356 回(6 月)	0 [0]	0.0 [0.0]	0.0 [0.0]

中学２年までに学習する単元とは異なり、２次方程式は基本的に答えが２通りあるというところにつまずく原因があるようだ。実際に、解が２つある因数分解型であっても解を１つしか書かない人の傾向も調査したので、そのことについては第８節に述べることとする。

因数分解型の問題において，不正解だった人の中には、解の公式を使って途中で終わってしまった人、符号が逆だった人、２つの解のうち１つだけしか答えなかった人たちで目立っていた訳であるが、これらを合わせると、誤答の中の４割以上（40.1%）に相当する。

６．「解の公式型」でよく見られた誤答とは

「解の公式型」ではどのような誤答が多かったのかを調べたところ、いろいろな間違いが複合的に合わさっており、１つ１つの誤答を追うのは困難であった。ただその中でも、約分が発生する問題では約分ミスが目立った。一例を挙げると、次のようなものである。

＜第 364 回３級１次(19)＞

$x^2-6x+4=0$ （正答達成率　77.3%）

（無答率　4.2%）

・約分ミスの解答

$(x=)\ 3\pm2\sqrt{5}$ （出現率　3.0%）

$(x=)\ 6\pm\sqrt{5}$ （出現率　0.7%）

$(x=)\ 3\pm\sqrt{20}$ （出現率　0.3%）

解の公式に当てはめると、まず $x=\dfrac{6\pm\sqrt{20}}{2}$ となり、$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ であることから $x=\dfrac{6\pm2\sqrt{5}}{2}$ となる。ここで、正しく約分ができれば正解となるのだが、上の約分ミスの解答は、分子にある２項のうち１項のみを２で割った解答である。とくに、分子の前項のみ割る人が多いことがわかった。このようなミスを減らすためには、次のように一旦割り算の形に直すとよい。分配法則の計算であれば、数検３級の受検者は９割以上が正しく計算できることがわかっている。もちろん、はじめのうちは「±」を「＋」と「－」に切り離して別々に計算するとよいだろう。

$$\frac{6\pm2\sqrt{5}}{2}=(6\pm2\sqrt{5})\div2=3\pm\sqrt{5}$$

ところで、「解の公式型」には約分が発生しない問題も存在する。約分が発生する問題と約分が発生しない問題の回次、平均正答達成率、平均無答率は以下のとおりである。

・約分が発生する問題（回次は 371、370、369、367、366、365、364、360、357、354 回）

平均正答達成率…59.7%、平均無答率…8.3%

・約分が発生しない問題（回次は 368、363、362、361、359、358、356、355 回）

平均正答達成率…71.8%、平均無答率…8.5%

平均無答率はほぼ同じであるが、平均正答達成率は 10%以上の開きがあることがわかった。このことから、約７割の受検者は解の公式に当てはめることができるが、そのうちの約１割の受検者はそこから約分に至るまでの過程でつまずいているといえる。

ちなみに約分が発生しない問題でどんな誤答が多かったかというと、前ページでも述べたようにいろいろな間違いが複合的に合わさっている解答がほとんどで、同じ誤答がたくさん見られるといったことはなかった。ただその中でも、決して多くはないが次の３つの間違いが全体を通して１％くらいの割合でそれぞれ現れた。

$ax^2+bx+c=0$ の解（解の公式）

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

① a の値が異なる（分子は正しい）
② b の符号が逆
③ c の符号が逆（根号の中の計算が誤り）

７.「c＝0 型」でよく見られた誤答とは（番外編）

中３の教科書では、「c＝0 型」は「因数分解型」に含まれているのだが、「c＝0 型」は「因数分解型」とは異なる解答の傾向があることがわかった。2020 年度に実施された３級１次検定では「c＝0 型」は１題も出題していなかったが、階級を拡大して調べると、第 367 回準２級１次検定で出題されていた。その問題ともっとも多かった誤答は次のとおりである。

＜第 367 回準２級１次（４）＞

$3x^2-x=0$	（正答達成率　75.7%）
	（無答率　1.2%）

・解を１つのみ答えた解答

$(x=)\ \frac{1}{3}$	（出現率　8.1%）
$(x=)\ 0$	（出現率　1.2%）

もちろん、３級１次検定で出題していたら正答達成率など多少変わっていただろうとは思うが、これでも十分参考にはなる。

「c＝0 型」は、右辺が 0 のときの左辺を x でくくり出すことができるため、「因数分解型」とみなすこともできるかとは思うが、もっとも多かった誤答が「因数分解型」とはやや傾向が異なっている。

上記の「解を１つのみ答えた解答」は、「因数分解型」でもよく見られたが、３級１次で出題した第 371 回、第 368 回、第 360 回、第 359 回（第 356 回は重解なので除く）の平均出現率は 4.3%ほどであり、上記の準２級では合わせて 9.3%にもなる。解の１つを代入することで求めたのであれば、「$x=\frac{1}{3}$」の解は見つけにくいのではないだろうか。これはすなわち、与式の両辺を x で割ってしまったのだろう。

ところで、この問題で不可解な解答が見られた。それは「$x=0,\ 1$」というものであるが、これが全体の 2.7%もいたのである。与式の x^2 の係数を見逃してしまったのか、なぜこのような解答がそれなりに見られたのかは不明である。

８．因数分解型で１つの解だけ答える人の調査とその結果

第５節の最後に、解が２つある因数分解型の問題で解を１つしか書かない人がそれなりにいることを紹介した。さらに、それは大小の解のうち大きいほうの解を答える人が多いことも分かっている。３級１次検定は答えのみを書かせる形式であるため、受検者がどのように考えたかまでは分からない。そこで、2021 年度に実施された第 375 回３級２次検定において、解法の過程を記述させる因数分解型の２次方程式の問題が出題されていたので、その解法の過程を調査した。その結果、たいへん興味深いことが見えてきた。該当する問題は、下に示した(２)である。

第 375 回３級２次検定出題

縦が 2cm，横が 4cm である長方形をＡとし，長方形Ａの縦を x cm 長くして，横を $2x$ cm 長くした長方形をＢとします。次の問いに答えなさい。ただし，$x>0$ とします。

⑴　長方形Ｂの面積は何 cm^2 ですか。x を用いて表し，展開した形で答えなさい。

（正答達成率　62.8％）

⑵　長方形Ｂの面積が 50cm^2 であるとき，x の値を求めなさい。⑴から２次方程式をつくり，それを解いて求めなさい。この問題は，計算の途中の式と答えを書きなさい。

（正答達成率　48.6％）

⑴は、長方形Ｂの縦が $(2+x)$ cm、横が $(4+2x)$ cm で表されることから、その面積は

$$(2+x)(4+2x)=2x^2+8x+8\ (\mathrm{cm}^2)$$

となる。これが⑴の答えである。

⑵を解くにあたってさまざまな解法があるが、代表的な解法を２つ挙げると、次のようなものがある。

（因数分解を用いた解法）

$2x^2+8x+8=50$

$x^2+4x-21=0$

$(x-3)(x+7)=0$

$x=3,\ -7$

$x>0$ より，$x=3$

（解の公式を用いた解法）

$2x^2+8x+8=50$

$x^2+4x-21=0$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-21)}}{2}$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\dfrac{-4\pm10}{2}$

$x=\dfrac{-4+10}{2}$ または $\dfrac{-4-10}{2}$

$x=3,\ -7$

$x>0$ より，$x=3$

（２）が正解だった受検者の 70％が因数分解を用いて解いていた。そして、解の公式を用いて解いていた受検者は 14％いたのだが、残りの 16％の正解者は、下のように平方完成の考え方を用いて解いていた。

（平方完成の考え方を用いた解法）

$2x^2+8x+8=50$

$x^2+4x-21=0$

$(x+2)^2=25$ …①

$x+2=\pm5$ …②

$x=3,\ -7$

$x>0$ より，$x=3$

ところで、この 16％には含まれてはいないが、平方完成の考え方を利用しようとしたものの途中で間違えている人もそれなりにいた。そして、その人たちの間違え方には共通点があることもわかった。それは、上の①から②にかけて、次のようにしている解答である。

$(x+2)^2=25 \quad \Rightarrow \quad x+2=5$

ここでも、第４節で紹介した「$b=0$ 型」でよく見られた誤答（「±」を付けていない）と同じ間違い方をしていたのである（該当者は 101 人、受検者は 5769 人なので、1.75％に相当する）。「±」を付けないことで、本来２つある解が１つになり、かつ大小の解のうち大きいほうの解を答える要因にもなっているのである。

このような間違いを防ぐためには、第４節でも触れたが、やはり「±」を付ける習慣を十分に身につけさせる必要があるだろう。

９．２次方程式を学習する順序

現行の中学校３年の教科書のうち、啓林館、東京書籍が発行しているものは「$b=0$ 型」、「解の公式型」、「因数分解型」の順に掲載されており、数研出版、日本文教出版、大日本図書、学校図書、教育出版が発行しているものは「因数分解型」、「$b=0$ 型」、「解の公式型」の順に掲載されている。ここで前者をＡパターン、後者をＢパターンと呼ぶことにする。

Ａパターンでは、平方根の考えを使って「$b=0$ 型」を教え、それを応用（平方完成）して「解の公式型」の解き方を導く。そして最後に「因数分解型」の問題を示して、因数分解ができる問題に関しては解の公式を使わないほうが簡単に解けるということを紹介する、という流れになっている。つまり、中盤で一般形を紹介して、終盤でそれが特殊形でも成り立つことを伝える流れとなっている。

対してＢパターンでは、最初に「因数分解型」を教え、続いて「$b=0$ 型」、最後にそれを応用して「解の公式型」の解き方を導くという流れになっている。つまり、序盤、中盤で特殊形の易しい問題を扱い、終盤に難しい一般形を扱うという流れになっている。

ちなみに、東洋館出版社が発行している『「指導と評価の一体化」のための学習評価に関する参考資料』(著作権所有は国立教育政策研究所教育課程研究センター)を参考にしたところ、ここではAパターンの流れに沿っていた。

Aパターンの順序の意図も理解できるが､著者はBパターンのほうが好ましいと考えている。なぜなら、それは本稿の序盤でも触れたが、数検３級１次において正答達成率は

「b＝0 型」＜「解の公式型」＜「因数分解型」

という関係が成り立っているからである。まずは、いちばん理解度の高い「因数分解型」を序盤にもってくるべきだろう。ここで、２次方程式では基本的に解が２つあるということを十分に意識付けさせることが重要である。

そして中盤には「b＝0 型」をもってくるべきだろう。「b＝0 型」は、正答達成率こそもっとも低いが、受検者全員が答えに「±」を付けることを意識してさえいれば、第 367 回、第 363 回、第 362 回の３回分を除いたすべての回において、正答達成率が「解の公式型」よりも上回るからである。そして「因数分解型」の学習で解が２つあることはすでに意識付けられている上に、「b＝0 型」の問題でも因数分解を利用して解けることも教えられるのである。ちなみに「b＝0 型」の問題を解く際に因数分解を利用することで、無理数の範囲の因数分解に触れることもでき、知識の理解が深まる。

終盤は「解の公式型」となるが、ここでも学習する内容と順序は大切だと考える。解の公式に至るまでの導入はこれまでどおりでよいが、その後の手順としては、次のように行うのがよいだろう。

①「解の公式型」の約分が発生しない問題
②「b＝0 型」の問題
③「因数分解型」の問題
④「解の公式型」の約分が発生する問題

解の公式の導入で、平方完成に触れることになるので、ここで初めて「$x=p\pm\sqrt{q}$」の形の解を見ることになる。したがって、導入直後の練習では忘れないうちに①を扱うとよい。

次に、②の「b＝0 型」の問題を扱うとよいだろう。解の公式で「±」を書かない受検者はほとんどいなかったことは本調査で判明したため、ここでも「b＝0 型」を解く際に「±」を書くことを再確認できるのである。また、係数の１つ(b)が 0 であることから計算も楽であり、早めに扱うのに適している。

次に、③の「因数分解型」の問題を扱うとよいだろう。「因数分解型」の問題で解の公式を使うと、平方根が外れて整数になることから、解の分子が「$m\pm n$(m、n は整数)」の形になる。本調査で「±」の意味を理解していないような解答がそこそこあり、ここで計算が止まってしまっている解答もそこそこ見られた訳であるが、ここでこの式の意味が「$m+n$」と「$m-n$」の２つをまとめたものであり、別個に計算しなくてはならないということを意識付けたい。ま

た、整数解が求まるので、与式に代入して解が正しいこと、そして実は因数分解できる問題であったことを確認する習慣を身につけさせたいところである。因数分解できることを確認することで、「因数分解型」で解の符号を逆にする解答も減るだろう。

最後に④の「解の公式型」の約分が発生する問題である。bの値が偶数であるので、この場合は平方完成を使って答えを導いてもよい。解の公式を使う際には、約分に注意することと、前々ページでも触れたが、慣れるまでは分数をわり算に直して、分配法則で計算するとよいだろう。

このようにＢパターンで学習すれば、理解しやすい上に特定の間違いも減らせることが期待できる。

10. まとめ

これまで２次方程式をいろんなパターンに分類して考察してきたが、簡潔にまとめると以下のとおりである。

・「b＝0 型」（平均正答達成率 56.2%，平均無答率 3.3%）

×の解答の多くは「±」を付けていない解答が多かった（平均出現率 21.9%）。

これは誤答の中の半数以上（54.1%）に相当する。

・「因数分解型」（平均正答達成率 74.3%，平均無答率 3.5%）

×の解答の中には、解の公式を使って途中で終わってしまった解答（平均出現率 2.1%）、符号が逆だった解答（平均出現率 2.1%）、２つの解のうち１つだけしか答えなかった解答（平均出現率 3.7%）たちで目立っていた。とくに最後の傾向は、「b＝0 型」で「±」を付ける習慣が身についていれば防げることもわかった。

これらを合わせると、誤答の中の４割以上（40.1%）に相当する。

・解の公式型（平均正答達成率 64.8%，平均無答率 8.4%）

いろいろな間違いが複合的に合わさっており、１つ１つの誤答を追うのは困難な状態。

約分が発生する問題では約分ミスが目立つ（約分が発生しない問題の正答達成率が７割強なのに対し、約分が発生する問題の正答達成率が６割弱）。

解の公式に正しく当てはめられる人の６人に１人（16.9%）が約分でつまずいていることがわかった。そして「b＝0 型」のときとは異なり、公式の中に「±」をきちんと書く人が多いこともわかった。

・「c＝0 型」（番外編）

中３の数学の教科書では、「c＝0 型」は「因数分解型」に含まれているが、「因数分解型」とは異なり、両辺を x で割って「x＝0」の解を除外した解答が目立った。

11. 最後に

２次方程式は、中３で教わる単元の中ではもっとも重要だと考えている。なぜならば、高校以上の範囲になると、もはや２次方程式を使わない単元など無いくらい当たり前に使われてい

るからである。中３の範囲でも、その後に学習する「関数 $y=ax^2$」や「三平方の定理」の単元は２次方程式が基礎となっており、「相似な図形」や「円」の単元なども、出題の仕方によっては２次方程式が現れるのである。そこで、中３で学習する２次方程式は全員理解できるようになってもらいたいと願い、そのためにつまずきの原因を探った次第である。

今回の調査でいちばん驚いたことは、「b=0 型」では答えに「±」を付けない受検者が多い反面、「解の公式型」では「±」をきちんと付けている受検者が多かったということである。このことが意味するのは、「±」についてその意味を理解しておらず、むしろ何かの記号のように考えている人がそれなりにいる、ということである。解の公式は暗記するため、公式の中に「±」は書けるものの、その後の計算ができない人も少なくなかった。

そういった意味で、今回の調査で明らかになった重要なポイントは、「±」の意味の理解といってもよく、今後その意義をさまざまな形で伝えていけたらと思う。

参考・引用文献

[1]公益社団法人日本数学教育学会「２次方程式の解の傾向－答えの書き方から見えてくるもの」
　穂積悠樹　2021 年
[2]公益財団法人日本数学検定協会「第 354～372 回実用数学技能検定（数学検定）３級」2020 年度
　公益財団法人日本数学検定協会「第 367 回実用数学技能検定（数学検定）準２級」2020 年度
　公益財団法人日本数学検定協会「第 375 回実用数学技能検定（数学検定）３級」2021 年度
[3]啓林館「数学３」令和３年
[4]東京書籍「数学３」令和３年
[5]数研出版「数学３」令和３年
[6]日本文教出版「数学３」令和３年
[7]大日本図書「数学３」令和３年
[8]学校図書「数学３」令和３年
[9]教育出版「数学３」令和３年
[10]東洋館出版社「「指導と評価の一体化」のための学習評価に関する参考資料【中学校　数学】」
　令和２年

速さに関する論述式問題の答案分析

ー算数検定の答案の分析を通してー

学習数学研究所
松本　精一

要約

2020 年 8 月 5 日第 102 回全国算数・数学教育研究（茨城）大会幼稚園・小学校部会において、「速さに関する論述式問題の答案分析」と題した研究を紙上で発表した。本稿は、このときの研究をもとに答案の調査分析を進めて再構成したものである。

６級で出題した「速さ」を求める論述式問題を３回分調査した。正答達成率は３回とも 80％を上回り、よくできていた。正答については、公式「速さ＝道のり÷時間」を用いたものがほとんどであったが、方程式を用いる解法や比を用いる解法など、工夫した解法が見られた。誤答については、公式の誤用や単位変換の誤りなどがみられた。

キーワード：速さ、時速、分速

１　研究のねらい

令和２年度に施行された小学校学習指導要領算数の第５学年の目標（２）として、「円の面積及び角柱などの体積を求めることができるようにするとともに、速さについて理解し、求めることができるようにする。」とある。

今回の調査では、旧学習指導要領の「Ｂ量と測定」の「速さ」の問題を扱った。令和元年度以前に実施した実用数学技能検定（算数検定）６級の論述式問題の答案から、正答、誤答それぞれ受検者がどのように解答したかを分析した。

２　研究の内容（方法）

算数検定６級の出題範囲は小学校第６学年と第５学年の２学年にわたり、受検者の多くは6年生である。このことから、分析する問題を６級で出題した「速さ」の論述式問題とした。比較しやすいよう出題内容をそろえて、道のりと時間が与えられ速さを求める問題とし、３題を選んだ。

第318回検定で予備調査をし、解答類型として正答を５種類、誤答を５種類、部分点を１種類、合計１１種類に分類した。

- 正答
  - ①道のり÷時間＝速さ（公式）を用いた解法
  - ②単位変換を含む解法
  - ③時速↔分速の変換を含む解法
  - ④方程式の考え方を用いた解法

⑤その他正答

・誤答

⑥答えのみを記入

⑦公式の誤用（道のり×時間）

⑧単位変換の誤り

⑨その他誤答

⑩無解答

・部分点

⑪式のみ正解

３　結果

（１）第 318 回検定

次の問題は、第 318 回検定に出題した問題である。正答達成率は(24) 85.7%、(25) 50.3%であった。

> 150 km を 2.5 時間で泳ぐカツオと，時速 100 km で泳ぐメカジキがいます。泳ぐ速さが変わらないものとするとき，次の問題に答えましょう。
>
> (24)　カツオの泳ぐ速さは，時速何 km ですか。この問題は，計算の途中の式と答えを書きましょう。
>
> (25)　メカジキは，25 km 泳ぐのに何分かかりますか。

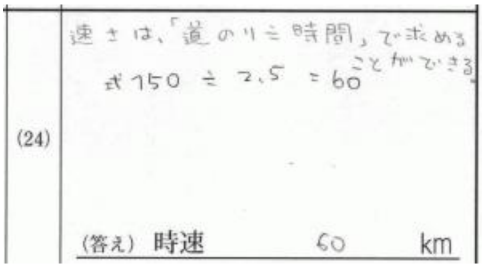
(24)の論述式問題について見ると、受検者数1269人のうち、正答1052人(82.9%)、誤答149人(11.7%)、部分点68人(5.4%)であった。正答に至らずとも記述の途中まで正しい答案に、ある一定の点数（部分点）が与えられる。

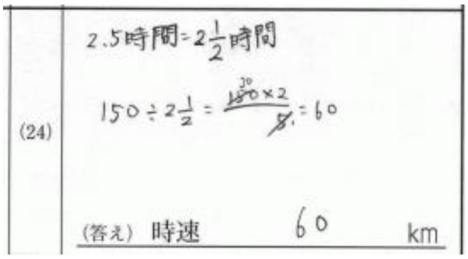
この問題は、小数または分数を使うものの、長さ（道のり）と時間から速さを求める基本的な問題であり、正答の反応率は82.9%と高めであった。

番号		解答類型	人数(人)	反応率	正誤
(24)	①	150÷2.5(2 1/2)＝60	1018	80.2%	○ 82.9%
	②	単位変換を含む	0	0.0%	
	③	分速1km →時速60km	10	0.8%	
	④	x×2 1/2＝150	7	0.6%	
	⑤	その他正答	17	1.3%	
	⑥	答えのみ	10	0.8%	× 11.7%
	⑦	150×2.5	35	2.8%	
	⑧	1500÷2.5等、単位変換の誤り	31	2.4%	
	⑨	その他誤答	49	3.9%	
	⑩	無解答	24	1.9%	
	⑪	部分点	68	5.4%	△ 5.4%
		合計	1269	100%	100%

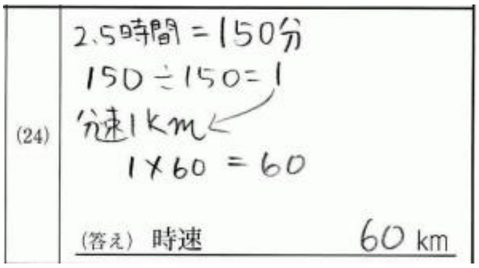
・正答について

①模範解答として示した解法で、「速さ＝道のり÷時間」の公式を用いている。反応率は80.2％であり、正答のほとんどがこの解法であった。この中には、2.5を分数で2 1/2と表し、公式を用いた解答を含んでいる（43人、反応率3.4％）。

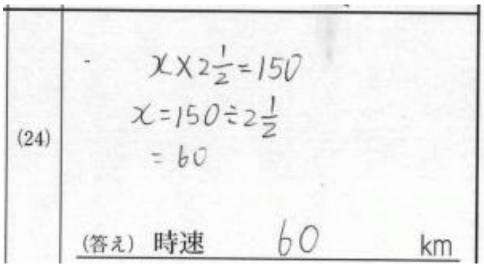


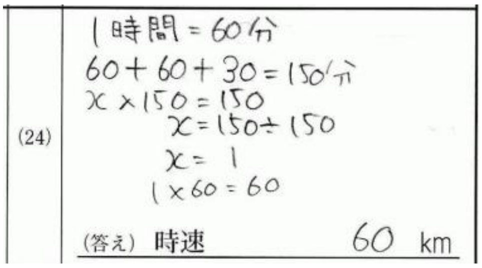


③150÷150＝１から速さを分速１kmとして、これを時速60kmに換算している。



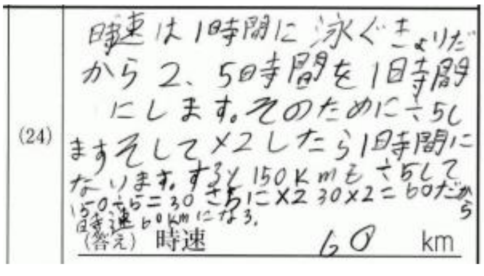
④方程式を用いた解法である。未知数をxとして方程式をつくり、xの値を求めている。

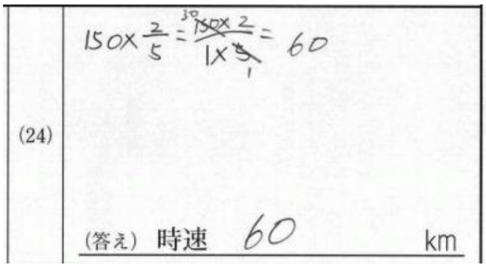




⑤150÷5＝30から30分で進む道のりを30kmとして、1時間に進む道のりを求めている。

１時間を2.5時間の2/5とみて、時速を求めている。



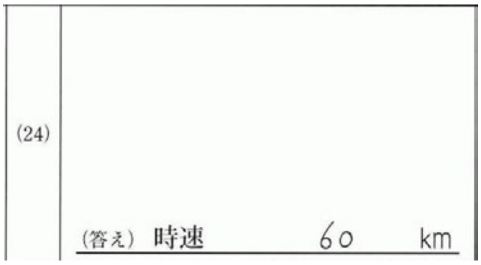


③～⑤の答案から、受検者が公式のみでなく様々な解法で問題に取り組んでいるこ

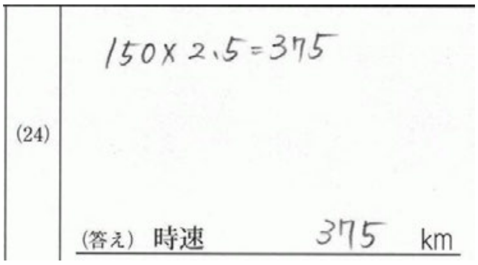
とがわかる。算数の授業で学ぶ、様々な観点から問題に取り組む姿勢が現れていると考えられる。

・誤答について

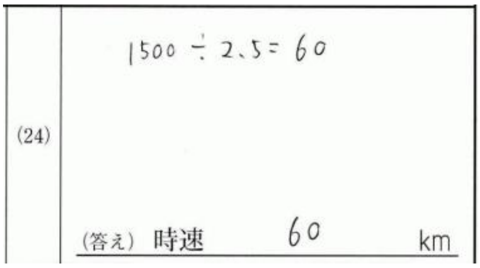
⑥答えは求められているが、解法が書かれていない。



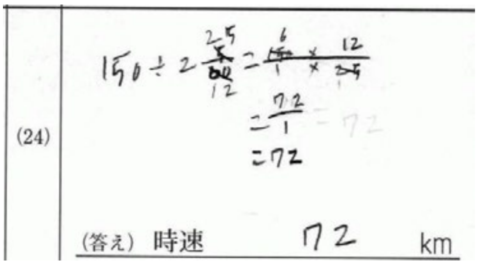
⑦乗法を用いている。公式を誤用した可能性がある。反応率 2.8%と誤答の中でこれがもっとも多い。



⑧150km を 1500m と考える等、単位変換の誤りが見られる。



⑨0.5 時間を 5/60＝1/12 時間として立式している。



（２）第 250 回検定

次の問題は、第 250 回検定に出題した問題である。正答達成率は (24) 87.0%、(25) 81.7%、(26) 82.7%であった。

> 15分で18 km 進む電車があります。これについて，次の問題に答えましょう。
>
> (24)　この電車の速さは分速何 km ですか。この問題は，計算の途中(とちゅう)の式と答えを書きましょう。
>
> (25)　この電車が35分走ると，何 km 進みますか。
>
> (26)　この電車が60 km 進むのに，何分かかりますか。

(24)の論述式問題について見ると、受検者数1316人のうち、正答1097人(83.4%)、誤答144人(10.9%)、部分点75人(5.7%)であった。

この問題は長さ（道のり）と時間が与えられて速さを求める基本的な問題であり、正答の反応率は83.4%と高めであった。

番号		解答類型	人数（人）	反応率	正誤
（24）	①	18÷15＝1.2	1006	76.4%	○ 83.4%
	②	18000÷15＝1200 1200m＝1.2km	67	5.1%	
	③	時速72km →分速1.2km	4	0.3%	
	④	x×15＝18	10	0.8%	
	⑤	その他正答	10	0.8%	
	⑥	答えのみ	18	1.4%	× 10.9%
	⑦	18×15	32	2.4%	
	⑧	1800÷15等、単位変換の誤り	37	2.8%	
	⑨	その他誤答	38	2.9%	
	⑩	無解答	19	1.4%	
	⑪	部分点	75	5.7%	△ 5.7%
合計			1316	100%	100%

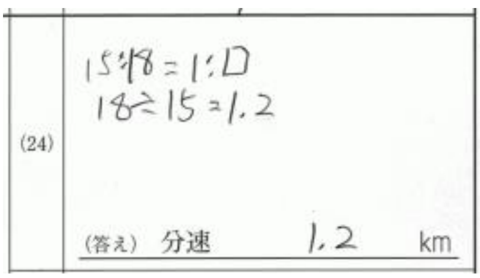
・正答について

①18÷15＝1.2 と公式を用いた解法で、反応率は 76.4%ともっとも多かった。

②18km＝18000m として、18000÷15＝1200 から分速 1200m と求め、単位を変換して分速 1.2km としている。

③15 分＝1/4 時間とし、18÷(1/4)＝72 から時速 72km と求め、72÷60＝1.2 から分速を求めている。

⑤比を用いている。



・誤答について

⑥答えのみの反応率が 1.4%と他の３回の検定と比較して高かった。

⑦18×15 と乗法を用いた解答の反応率が 2.4%と高かった。

⑧18km を 1800m とした単位変換の誤りの反応率が 2.8%と、誤答の中でもっとも高かった。

（３） 第 247 回検定

次の問題は、第 247 回検定に出題した問題である。正答達成率は (21) 96.7%、(22) 89.9%であった。

ある電車が，９６００ｍの道のりを８分で走りました。このとき，次の問題に答えましょう。

(21)　この電車の速さは分速何ｍですか。この問題は，計算の途中(とちゅう)の式と答えを書きましょう。

(22)　この電車は６０００ｍ走るのに，何分かかりますか。

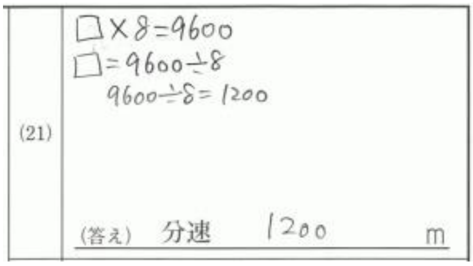
(21)の論述式問題について見ると、受検者数860人のうち、正答824人(95.8%)、誤答25人(2.9%)、部分点11人(1.3%)であった。

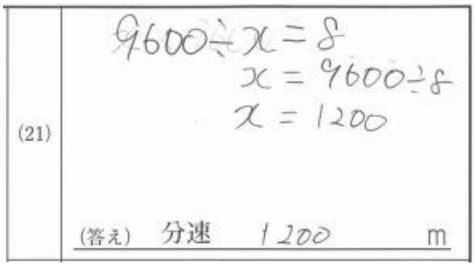
番号		解答類型	人数(人)	反応率	正誤
(21)	①	9600÷8＝1200	817	95.0%	○ 95.8%
	②	単位変換を含む	0	0.0%	
	③	時速→分速の変換	0	0.0%	
	④	x×8＝9600, 9600÷x=8	3	0.3%	
	⑤	その他正答	4	0.5%	
	⑥	答えのみ	11	1.3%	× 2.9%
	⑦	9600×8	1	0.1%	
	⑧	単位変換の誤り	0	0.0%	
	⑨	その他誤答	9	1.0%	
	⑩	無解答	4	0.5%	
	⑪	部分点	11	1.3%	△ 1.3%
		合計	860	100%	100%

・正答について

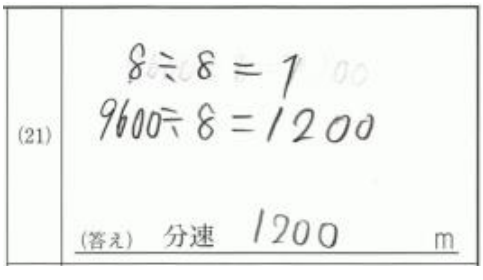
①9600÷8＝1200 と公式を用いた解法である。反応率は 95.0%と高く、ほとんどの受検者がこの解法であった。

④方程式を用いた解法である。□×8＝9600 や 9600÷x＝8 から□や x の値を求めている。





⑤8÷8＝1、9600÷8＝1200 と比の考え方を用いている。



（４）無回答率について

無解答率は、318回1.9％、250回1.4％、247回0.5％であった。下の表は、６回分の論述式の問題の無解答率をまとめたものである。これらと比較すると速さを求める問題の無解答率は低い印象である。

回次	305	277	276	303	280	283
内容	分数の乗法	円の面積	円の面積	円柱の体積	円柱の体積	縮図
無解答率(％)	2.2	0.8	3.7	1.9	2.0	3.7

４　まとめ

「速さ」は抽象的な概念であるので、正しく活用するには公式を暗記するだけでは不十分である。公式の意味を理解して、様々な観点から問題解決につなげることができるようにしておくことが必要である。

正答の反応率は調査した３回とも80％を超え、速さを求める基本的な問題に対しては、算数検定６級受検者はよくできていることが分かった。解答方法として、ほとんどの受検者が速さを求める公式を用いているが、そのほかにも様々な解法で問題に取り組んでいる受検者がおり、公式に頼らずとも正解に到達できる者が多数いることが分かった。分速を求めて時速に変換したり、時速を求めてから分速に変換したりすることは、解答を求めるためにはやや遠回りの感はあるが、速さについての理解が深くないとできないことである。方程式を用いている解答は、公式「速さ×時間＝道のり」を利用しているものがほとんどであった。この公式は速さの公式の中でもっとも理解しやすいものであろう。方程式を用いた解法は、中学校で学習することであるが、その後の学習にとても役立つ。少数ではあるが、比を用いている解答があった。これは、比例する関係を用いた解法であるが、その後の理科の学習に役立つ考え方である。

解法を記述する問題にもかかわらず、答えだけしか書かれていない答案が一定数あった。普段から問題を解くときには、解法の説明や式を書く習慣をつけることが大切である。乗法を用いている解法は、公式の誤用と考えられる。公式の意味を正確に覚えておくことが必要である。１kmを１００ｍとして計算している解答は、単位変換の誤りである。単位は日常生活でも扱うので、１単位が表す大きさを体感して正確に覚えておかなければならない。

無解答率は、「速さ」を求める論述式問題は他の内容の論述式問題と比較して低いようである。

今回の調査では誤答の反応率が低く誤答例は多く挙げられなかったが、正答の反応率が高かったため、正答について多くの類型に分類でき、受検者の速さの学習に対する取組みと、多様な解法があることが分かった。

引用・参考文献

[1]文部科学省「小学校学習指導要領解説　算数編」2008 年

[2]松本精一「速さに関する論述式問題の答案分析－実用数学技能検定（算数検定）の答案の考察８－」, 公益社団法人日本数学教育学会日本数学教育学会誌, 第 102 回大会特集号 2020 年（茨城大会）, pp50, 2020 年

[3]公益財団法人日本数学検定協会「第 318 回実用数学技能検定（算数検定）６級」2018 年

[4]公益財団法人日本数学検定協会「第 250 回実用数学技能検定（算数検定）６級」2014 年

[5]公益財団法人日本数学検定協会「第 247 回実用数学技能検定（算数検定）6 級」2014 年

数学はすべての学問の根底にある

学習数学研究所
渡辺 信

要約
文系大学の入学試験に数学を必修科目にする動きが始まった。文系の専門科目においても、数学が必要であることが世間に広く知らしめられた。数学ですべての思考方法が使われていることは具体的には見ることができない。しかし、就職時におけるSPI,公務員試験の数的処理など、数学の個々の知識ではなく、数学的思考が重視されている社会を再認識した。数学がすべてにおいてその根底にあることを知ると同時に、数学学習の必要性を知ることが重要である。

キーワード：数学的思考、大学入学試験改革、数学必修、数学の生涯学習

1. 大学入学試験での数学必須

今春の入学試験では、センター試験に変わって大学入学共通テストが始まった。またコロナ禍での大学2次試験の在り方も議論を呼ぶのではないかと思っていた。しかし、共通テストについては、センター試験の延長であり、特別の話題性がなかった。数学・国語での記述式も実施されず、英語の外部試験導入も一部はあったが問題にはならなかった。

このような中で早稲田大学が文系の政経学部が選択科目であった数学を必須科目として受験生に課した。早稲田大学の入試では60年くらい前、政経学部は数学を選択したほうが有利だと話題になっていた。記憶に頼る社会よりも点が取り易いし、難しい数学は出ないといわれていた。多くの受験者は数学を敬遠したが、昨年度の経済学科は50%くらいの受験者は数学を選んだ。今年影響が出たのは政治学科と国際政治経済学科で、大幅な減少になったという。

大学選択において文系か理系かの判断基準には数学の成績が使われるので、文系を選択する生徒は一般的に数学が嫌いと言われている。文系として名高い早稲田大学でも数学必修では受験生現象は当然であったかもしれない。数学嫌いな生徒は文系志望になる。いままで文系と言われてきた早稲田大学政経学部が数学必須となってことによって、文系志望者が他大学に移ったのは当然であると考えられる。しかし東洋大学ではほぼすべての文系学部で数学必須の入試方式を設けている。この数学必須の入学試験制度は今後多くの大学で行われるであろうと予想されている。慶応大学経済学部は数学必須であったが応募者数が少なく数学を必修から選択にしたのは残念であった。理由は数学の不必要は原因ではなかった。

2. なぜ、数学が必須なのか

大学の入学試験の科目の設定は、入学後の学習に必要な学問の準備ができているかを測ることであった。しかし、学生定員を満たすことを考えた大学側の経営方針が優先して、数学を入試に課すことを嫌う傾向が現れた。工学部で数学を受けなくてもよい大学は、新入生の数学力低下で講義内容が進めない事態に陥った。受験科目を決める大学側にとって、入学してくる生徒の学力保証は入試にあり、入試科目は入学後の講義に必要な学問を準備しておくことでもある。数学を入試科目としてない場合は、入学後の数学力は不必要と考えている。入学後の講義を聞く準備としての入学試験であるならば、入試に課さない科目が出来なくても卒業保証をするとも考えられる。数学がない受験生は、数学を取らなくても卒業ができるようになっている。

今回早稲田大学が数学必須にした理由は、現代の経済学・政治学を学ぶためにはデータ解析やゲームの理論などを取り入れたカリキュラム改革がなされたためだという。東洋大学が数学必須の入学試験制度を設けた理由として掲げたことは、経済学を理解するためには数学的リテラシーの必要性であった。経済学の変化が入学試験の科目の変化につながったのではなかろうか。経済学がマルクス経済学であったときには数学などいらなかったという。青木書店から出版されたマルクス全集には『数学』がその中の一冊になっていたにもかかわらず、経済学には数学はいらない時代が続いていた。

3. 数学不要な学問は存在するか？

20世紀最大の天才数学者ジョン・ナッシュはフォン・ノイマンのゲームの理論を継承し、ノーベル経済学賞を受賞した。最近のノーベル経済学賞の受賞者は数学に近い学者が選ばれている。数理経済学として数学を使う科目になった経済学を大学の講義にするためには、数学力が必要になったのであろう。このような理由から数学が必須になったのであれば、その数学の内容は数学Ⅰ・Aだけで済むであろうか。おそらく数学Ⅲの微分積分だけではなく、もっと高度な数学が要求される。学問の内容が変わったことによって、数学が必要になったとも考えられる。しかし、どの学問を専門に学ぶとしても数学が必要であったのではなかろうか。

最近、各大学での必須科目としてデータ・サイエンスが話題になっている。全学生に対して２単位必須になるという。このカリキュラムを文部科学省で認定しているが、その中には数学がなくてもよい。世界の動きから20年以上遅れたコンピュータを用いたデータ・サイエンスにどのような数学は必要不可欠なのかは分からない。今高校まで実施されている数学教育がそのまま変化しないままであったならば、数学教育の将来性はない。情報社会に進み、コンピュータが社会で日常使われるようになったときに数学はますます重要になる。コンピュータ技術によって、学問の世界は大きく動いている。このような社会の大きな動きの中で数学教育は電卓をも使わずに行われている。そして微分方程式は除かれ、今回行列も学習指導要領の数学の内容の隅に追いやられた。

数学不要な学問は存在するかという質問に対して、数学の重要性をほとんどすべての学問の世界で唱えるであろう。Technology が社会の改革に寄与することは歴史が物語る．現在の数学について「数理資本主義の時代（経済産業省，2019）」では数学について次のように指摘してい

る.

> この第 4 次産業革命を主導し，さらにその限界すら超えて先へと進むために，どうしても欠かすことができない科学が三つある.
> それは，第 1 に数学，第 2 に数学，そして第 3 に数学である！
> （数理資本主義の時代 P. 2）

しかし、この数学とは何かについて明確な指摘はない。現在の高校数学までを指し示しているとは思えない。現在の数学教育が変化しなければ、ここに書かれた数学には到底近づくこともできない。数学が必要のない時代はすでに遠く過ぎ去って、これからはますます数学の重要な時代になる。この文章にも矛盾があると読むこともできる。必要な科学が3つあると言い、示した科学は一つ数学しかないのはおかしいかもしれない。必要な三つの科学をすべて示していない。これからの社会にとって数学が重要な社会の到来が情報社会と言いたいのかもしれない。

4. すべての人に要求される力と数学

公務員試験や就職試験のSPIは数学が用いられている。公務員試験は専門試験と教養試験に分かれていて、後者は五者択一式のマークシート問題が一次試験として出題される。この中にある一般知能問題で、数学に分類されるのは①資料解釈・②数的処理・③判断推理の分野であって、数学的な問題が並んでいる。また、就職試験のSPIでも数学の問題が並ぶ。計算力も試される時間との勝負のようにも感じるが、数学的な知識が試されるのではない。このような試験は訓練すればだれでもできる。就職を希望する大学生に課せられる理由は、数学の力を試しているだけではなく、人間が思考をするための基礎となる力を測っているに違いない。評価したいことは論理性・積極性・好奇心・自信といったものであるならば、この公務員試験や一般企業の入社試験でまず初めに確認したい力を測定するためには数学を用いることが最善であると考えられている。

コンピュータ技術の発展が生み出した情報社会になって、数学技能はコンピュータソフトによって置き換えられた時代になった。このような状況の下でもすべての人に要求される力は以前の工業社会から継続的に必要不可欠と考えられることは変わらない。最近は読解力の重要性に傾きかけているが、科学の重要視される情報社会においても論理性・積極性・好奇心・自信といった項目は必要である。このような項目を測るために数学の問題が用いられていることは、数学がどの分野においても必要と考えてよい。この段階における数学が指し示すことは、高度な数学を指すのではないことも明らかである。

この試験が選択肢を選ぶ試験方式をとっているのは、選択式問題が測定に値するものではない。採点の都合上の問題など、やむを得ない理由から選択式テストを行っていると考えられる。入学試験において数学は必要と思っていても、文系科目が数学を必修にできなかったことと似ている。この選択式のテスト問題のために必要なことは、記述式として数学をきちんと考える

訓練である。問題の条件から論理的に結論を導き出すためには、実際に答えを導き出さなくてはならない。答えが示されていることから正しいものを選ぶこととは全く異なる記述式の訓練は欠かせない。穴埋め問題・選択式問題になれると、自らが考える訓練はできない。現在の数学教育は穴埋め的な方向に走りすぎていて、記述式な数学問題が少なくなってしまった現状を反省する必要がある。試験は穴埋め問題であったり、選択式の問題であるかもしれないが、すべての人に求められている力は記述式によって訓練される。

5. 数学は社会で役立つか

1980年代の学習指導要領の改訂時において、2次方程式の解の公式は必要かという問題提起がなされたことがあった。もう昔のことに思えるかもしれないが、社会生活を行う中で一度も使ったことがない難しい公式など学ぶことを止めてもよいのではないかという問題が社会問題になったときに、数学者も数学教育者も明確にこの問題に答えられなかった。そして世論の後押しもあり、学習指導要領の中から2次方程式の解の公式は消えた。現在の数学教育では2次方程式を解くためにはすべて公式に当てはめることが推奨されている。このようなことは2次方程式の解の公式だけに言えることではない。数学の知識はほとんどの場合この不要論が成り立つ。πの値として3.14はよく知られた数であるが、円周率は知らない。πを日常生活で使ったことがある人は非常にまれであろう。一般社会人はπ＝3.14は知っていても日常生活の中では使わない。直接生活に必要ない数学知識を主要教科として学ぶことに疑問を感じているかもしれない。現在の段階では疑問を感じなくても、誘導されれば考え方が変わる可能性がある。これが1980年代になされたことであった。

数学は役立つかという問いかけは生徒からも起こる可能性がある。数学を学びたくない、数学が嫌いな生徒の発する言葉として、数学が役立つかを問うことである。これに対して現場の先生方は明確に答えられない。数学は役立つために教育がなされていると思い込んでいる側からの発言は、何を言っても積極的な解答にはならない難しい問題である。このような疑問を持たせない学習を考えることが必要である。すべての人に必要な力として、また学問の根底にある数学の思考を大切にしなくてはならない。

数学が役立つかということに対して、数学という言葉が何を指し示しているかを考える必要がある。2次方程式の解の公式も円周率πも、そのほかの数学的知識そのものが直接日常生活には役立たない。このことは日常生活を行っているすべての人は知っている。そして数学知識の背後にあることが役立つことも知っている。数学がすべての思考の根底にあることにも気付いているに違いない。

6. 数学嫌い解消はなぜできないのか

数学が重要な社会を迎えるにあたり、現在の学校教育では数学嫌いの生徒は多い。数学嫌いという言葉が社会問題になり、高校生の70％は数学が嫌いという。学校教育では小学校の算数から中学・高校の数学の教育は重要な教科として扱われている。数学教育の現場で直接数学を

担当している先生方は『数学嫌い』解消のために日々努力をしていても、この数学嫌いは増える。数学はすべての人にとって必要な力を育成するならば、なぜ解消できないのであろうか。この問題に対して明瞭な答えは見当たらない。

理解できない生徒のほうに問題点を押し付けてはいないであろうか。数学は出来不出来が明確にわかる教科であり、出来ないというレッテルは数学嫌いになることは間違いない。数学嫌いになるのは生徒自身の問題と決めつけてはいないであろうか。現在の数学教育の内容が新しい社会が求める数学とは違うことを、生徒のほうが気が付いているとは考えられないであろうか。電卓技術が進み、計算は早く正確に答えを出す。しかし、現在の数学教育は数学技能を身に付けることを目標としているような状況が至る所にあるのではないか。学習指導要領は10年ごとに変わる。今の学習指導要領の結果を検証することなく、次の学習指導要領の改革が計画されている。若者が求める数学感覚とのずれが生じているのではないかと考えられるのではなかろうか。以前、これからの情報社会にとって線形代数は必要不可欠と考えられると、日本の数学教育だけが高校に『行列と行列式』を導入した。この1960年代には現在の情報社会を見ることはできなかった。残念ながら情報社会になりつつあり現在の学習指導要領から『行列と行列式』が消えようとしている。何を根拠に学習指導要領は変わるのか。若者が求める数学が数学嫌い解消の答えなのかもしれない。

7. 生涯学習としての数学

生涯学習として考えていることは『学び直し』として、再び学校で学ぶことを考えている。このような生涯学習は数学嫌いを増やすだけではなかろうか。科学技術の発展は人々に『学び直し』を強要する社会になる可能性がある。現在の我々の社会は工業社会から情報社会への過度期と考えられる。この過度期において一般の人々はだれでもが『学び直し』をしていると考えられないであろうか。そこには学校へ行く必要はない。人々は自ら積極的に『学び直し』をしている。この社会が持っている力を積極的に活用することを考えるならば、学校教育において必要なことは数学嫌いを生み出さないことであろう。中国の科挙の制度の影響があったかは分からないが、日本人が好む試験制度を活用して検定を楽しむ後押しを社会がすることもおもしろい。現在の生涯学習の考え方は学習者である一般市民に対して教育者が教えるという一方的な方向の学習を指している。この線上の『学び直し』はまさに学校教育の再来である。もっと楽しい学びとしての生涯学習を培う必要がある。誰にでも必要な力を自ら積極的に楽しむ学びの生涯学習を考えたい。その生涯学習の中で自由に学ぶことは、数学の問題を自由に考えることと似ている。誰もが数学を自由に考え楽しむことによって、生涯学習としての学びの継続する社会を構築していくことが必要である。数学がすべての生活の中をも含めて、学問全体の根底にあることは生涯学習として学ぶ必然性がある。

参考文献

[1] 経済産業省　「数理資本主義の時代」　2019年

[2] 儀我美一,小林俊行　「数学は役立っているか？」　シュプリンガージャパン社　2010年

[3] 渡辺信　「数学試験「記述式」の重要性」　数学学習研究所　2019年

[4] 渡辺信　「数学検定の７技能の重要性」　数学学習研究所紀要　第3巻・第4巻合併号、pp.40-48、2021年

[5] 渡辺信,青木孝子,青木由香利　「Society5.0社会で必要な数学のための数学教育の在り方の研究」第54回全国数学教育学会共同研究　2021年

【研究ノート】

直辺四面体の体積公式について

学習数学研究所　特別顧問

一松　信(*)

１．はじめに

１つの面の３辺長が a，b，c で，そのおのおのに対する対辺の長さがそれぞれ d，e，f である四面体の体積 V を求める公式は次のとおりである(たとえば文献[1]，[2]など)。

$$\begin{aligned}(12V)^2=&a^2d^2(b^2+c^2+e^2+f^2-a^2-d^2)\\&+b^2e^2(c^2+a^2+f^2+d^2-b^2-e^2)\\&+c^2f^2(a^2+b^2+d^2+e^2-c^2-f^2)\\&-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2d^2f^2-c^2d^2e^2\end{aligned}\tag{1}$$

(オイラーの体積公式；和算家のいう六斜術)

式(1)は，他の表現もあるが，平面のヘロンの公式とは違って，一般的にはこれ以上簡略化(因数分解など)ができない。ただ等積四面体：$d=a$，$e=b$，$f=c$ の場合には次のようになる。

$$((1)\text{の右辺})=2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\tag{2}$$

２．直辺四面体の場合（１）

直辺四面体とは，一対の対辺３組がそれぞれ互いに直交する四面体である(詳しくは文献[2]などを参照)。そのための１つの必要十分条件は，次の等式である。

$$a^2+d^2=b^2+e^2=c^2+f^2\ (=\ell^2\ \text{とおく})\tag{3}$$

これから，直辺四面体の６辺長の２乗は，４個の変数 ℓ^2，a^2，b^2，c^2 で表される。実際，$d^2=\ell^2-a^2$，$e^2=\ell^2-b^2$，$f^2=\ell^2-c^2$ を(1)に代入して整理すると，最終的に次の結果を得る。

$$(12V)^2=\ell^2(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)-4a^2b^2c^2\tag{4}$$

(4)で右辺の初項の(　)内は，△ＡＢＣの面積を S とすると，$(4S)^2$ である(ヘロンの公式)。またその外接円の半径を R とすると，$abc=4RS$ から，(4)は次のようにも表される。

$$(3V)^2=S^2(\ell^2-4R^2)\tag{5}$$

直辺四面体の１つの面の面積 S とその外接円の半径 R とが既知なら，公式(5)は有用である。

しかし，少し別の面から「対称な」公式を求めてみよう。

３．直辺四面体の場合（２）

直辺四面体の６辺長は実質的に４変数で表される。それらが新たな助変数 α、β、γ、δ により，次のように表されていると仮定する（後述参照)。

(*)SIN HITOTUMATU，京都大学名誉教授，公益財団法人 日本数学検定協会名誉会長

$$a^2=\beta+\gamma,\ b^2=\gamma+\alpha,\ c^2=\alpha+\beta,\ d^2=\alpha+\delta,\ e^2=\beta+\delta,\ f^2=\gamma+\delta$$
$$\ell^2=\alpha+\beta+\gamma+\delta \tag{6}$$

このとき，その体積 V は次のように表される。

$$(6V)^2=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\alpha\beta\gamma\delta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right) \tag{7}$$

これは簡単な対称式なので，活用できそうである。

ここでまず(6)のような表現の可能性を考える。(6)を仮定すると，はじめの３式から

$$\alpha=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\qquad \beta=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},\qquad \gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \tag{8}$$

である。これらがすべて正のためには，３辺長が a，b，c の面が鋭角三角形である必要がある。そのとき，(6)から

$$\delta=\ell^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \tag{9}$$

を得て，α、β、γ、δ が定まる。この計算により α、β、γ、δ の中の１つが負の値になったときには要注意である。機械的に計算して差し支えない場合が多いが，与えられた６辺長 a，b，c，d，e，f の数値をもつ直辺四面体が実在しない可能性がある。

ベクトルを活用すると，次のような表現もできる（文献[2]第９話；そこではそれぞれが x，y，z，w と表されている)。・は内積を表す。

直辺四面体ＡＢＣＤでは次の等式が成立し，それぞれの値が前述の α、β、γ、δ を表す（等式は直交性による)。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\alpha$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\beta$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\gamma$$
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\delta$$

この事実から，$\delta=0$ はＤに会する３辺が互いに直交することを意味する。

４．公式(7)の証明

その証明は(6)を(1)に代入して計算するだけだが，一応やってみることにする。直辺四面体の場合には，(1)の最初の３項の(　　)内はすべて ℓ^2 に等しく，(1)は次のようになる。

$$\begin{aligned}(12V)^2=\ell^2&[(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)+(\gamma+\alpha)(\beta+\delta)+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)]\\&-(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)-(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)\\&-(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\gamma+\delta)-(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)\end{aligned}$$

この第１項は展開整理して，次のようになる。

$$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$
$$=2(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha^2\delta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\beta^2\delta+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+\gamma^2\delta+\delta^2\alpha+\delta^2\beta+\delta^2\gamma)$$

$$+2\times3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta) \tag{10}$$

第２項以下は，展開してまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma\\
&+\alpha^2\beta+\alpha^2\delta+\beta^2\alpha+\beta^2\delta+\delta^2\alpha+\delta^2\beta+2\alpha\beta\delta\\
&+\alpha^2\gamma+\alpha^2\delta+\gamma^2\alpha+\gamma^2\delta+\delta^2\alpha+\delta^2\gamma+2\alpha\gamma\delta\\
&+\beta^2\gamma+\beta^2\delta+\gamma^2\beta+\gamma^2\delta+\delta^2\beta+\delta^2\gamma+2\beta\gamma\delta)\\
=&-2(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha^2\delta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\beta^2\delta+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+\gamma^2\delta+\delta^2\alpha+\delta^2\beta+\delta^2\gamma)\\
&-2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)
\end{aligned} \tag{11}$$

両者を併せると，⑾の第１項は⑽の第１項と打ち消す。そして第２項をまとめて

$$4(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)$$

となる。全体を４で割って，⑺を得る。

５．実例

前述の公式⑺は簡単だが，具体的に６辺長の数値が与えられたとき，直辺四面体の体積を計算するのに必ずしも有利とはいえない。⑻，⑼によるα、β、γ、δの計算が意外に煩雑な場合が多いからである。ただ面をうまくとって，α、β、γ、δの符号の検証をするのは重要かもしれない。

（ｉ）　$\delta<0$でもよい例

いささか人為的な例だが

$\alpha=3$、$\beta=4$、$\gamma=5$、$\delta=-1$ ：

$\alpha+\beta=7$，$\alpha+\gamma=8$，$\beta+\gamma=9$，$\alpha+\delta=2$，$\beta+\delta=3$，$\gamma+\delta=4$，$\ell^2=11$

とする。平たい四面体だが実在する。体積Vは

$$(6V)^2=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=60-(12+15+20)=13$$

すなわち，$V=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$である。原公式⑴から直接計算すると，次のようになる。

$$\begin{aligned}
(12V)^2&=11\times(7\times4+8\times3+9\times2)-(7\times8\times9+7\times3\times2+8\times4\times2+9\times4\times3)\\
&=11\times(28+24+18)-(504+42+64+108)\\
&=770-718\\
&=52
\end{aligned}$$

やはり，$V=\dfrac{\sqrt{52}}{12}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$である（当然）。公式⑸によってもよい。

（ii）　直正三角錐の場合

底辺が１辺長 q の正三角形で，斜辺がいずれも等長 $p\left(p>\dfrac{q}{\sqrt{3}}\right)$ の直正三角錐は直辺四面体である。この場合は公式(5)が有用だが，３節のように進む。前述の諸量は

$$\ell^2=p^2+q^2,\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{q^2}{2},\quad \delta=p^2-\frac{q^2}{2}$$

であり，その体積は公式(7)から次のようになる。$\delta\leqq 0$ のこともあるが差し支えない。

$$(6V)^2=\frac{q^6}{8}+\frac{3q^4}{4}\left(p^2-\frac{q^2}{2}\right)=\frac{q^4}{4}(3p^2-q^2)$$

より

$$V=\frac{q^2}{12}\sqrt{3p^2-q^2} \tag{12}$$

直接に計算すると，高さが $\sqrt{p^2-\dfrac{q^2}{3}}$ であるから

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}q^2\sqrt{p^2-\frac{q^2}{3}}=\frac{q^2}{12}\sqrt{3p^2-q^2}$$

となって，(12)と一致する(当然)。

(iii)　４次元空間内の五平方の定理

４次元空間内で，１点Ｏを通って互いに直交する４本の半直線上に，それぞれＯＡ＝a，ＯＢ＝b，ＯＣ＝c，ＯＤ＝d である４点をとる。四面体ＡＢＣＤの各辺長はそれぞれ

$$a^2+b^2,\quad a^2+c^2,\quad a^2+d^2,\quad b^2+c^2,\quad b^2+d^2,\quad c^2+d^2\quad ;\ \ell^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

であり，これは直辺四面体である。その体積 V は，a^2，b^2，c^2，d^2 を順次前述の α，β，γ，δ に対応させることができて

$$(6V)^2=a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2$$

となる。これは４次元空間内での次の「五平方の定理」の直接証明でもある。ここに各項は，それらの４点を頂点とする四面体で，｜　　｜はその体積を表す。

$$|\mathrm{ABCD}|^2=|\mathrm{OABC}|^2+|\mathrm{OABD}|^2+|\mathrm{OACD}|^2+|\mathrm{OBCD}|^2$$

６．むすび

直辺四面体について，比較的簡単な体積公式を得た。いずれの公式(5)，(7)も既知だが，とくに(7)は対称性が高いので，有効な場合もあると思う。

参考文献

[1]H.S.M.Coxeter,Introduction to Geometory,
John Wiley,1960；日本語訳，銀林　浩，幾何学入門，明治図書，1969

[2]一松　信・畔柳　和生，重心座標による幾何学，現代数学社，2014；(とくにその第７話と第９話)

【報告】

地域協働学力向上プログラム事業

算数の学力の向上に成功した釧路市立鳥取小学校とコミュニティ・スクールの実践例をもとに、他の小中学校にも導入できる学力向上プログラムを構築し、地域の学力向上を図ることを目的とし、2020 年 6 月 1 日「地域協働学力向上プログラム事業に関する包括連携協定書」を釧路市立鳥取小学校と締結した。

第 369 回検定（2021 年 2 月 12 日）を実施した。受検者は５級 3 人、６級 49 人、７級 50 人、８級 55 人、９級 17 人、10 級 15 人、11 級 10 人であった。小学４年生〜６年生は全員が受検し、１年生〜３年生は希望者のみが受検した。2021.05.10 合格率、得点分布、正答達成率についてまとめ、2021 年 5 月 10 日に報告した。2021 年 11 月 26 日誤答分析を提出した。

第 386 回（2022 年 2 月 18 日）を実施した。受検者は４級 2 人、５級 1 人、６級 43 人、７級 55 人、８級 49 人、９級 18 人、10 級 14 人、11 級 11 人であった。小学４年生〜６年生は全員が受検し、１年生〜３年生は希望者のみが受検した。６年生、５年生は３年間続けて全員受検しているので、６級、７級を中心に合格率、得点分布、正答達成率について３年間の成績をまとめて報告する。

実用数学技能検定（数学検定・算数検定）に関する調査

2021 年度、実用数学技能検定（数学検定・算数検定）に関する以下のような調査を行った。

「東京都北区立中学校（公費受検）の受検者調査」
「埼玉県深谷市立中学校（公費受検）の受検者調査」
「静岡県袋井市立小学校（公費）の受検者調査」
「芝浦工業大学（新入生対象）の受検者調査」
「2020 年度の２次方程式（３級１次）の解答の傾向について」
「2019 年度と 2020 年度の３〜５級の１次：計算技能検定における当該学年の正答達成率比較調査（コロナ禍における特定の分野についての学力変化の調査）」
「全階級の相関係数」
「大学入試共通テストの研究」

文部科学省認定「高校生のための学びの基礎診断」測定ツール

平成30年（2018年）12月26日に認定された「高校生のための学びの基礎診断」測定ツールについて、文部科学省に年度ごとに事業報告を提出している。

2021年度については、各測定ツールとも実施校は０校であった。

認定の有効期限は2022年3月31日までであったが、認定後の３年間に実施した高等学校が１校だけであったことから、測定ツールとして再申請はしなかった。

免許状更新講習

当協会は、平成 31 年（2019 年）３月８日付けで文部科学省総合教育政策局長から免許状更新講習を開設できる者として指定された。

令和元年度から令和３年度まで免許状更新講習を開講している。講師は清水理事長と渡邉理事が担当した。

令和３年度は、４講座を受講者の希望により対面型またはオンライン型で同時に行った。

開講日	令和３年（2021 年）９月 19 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（小学校算数科を中心に）
講習の概要	小学校算数科にかかわる内容を中心に次の構成で講習を実施する。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷(算数科を中心に) ２．新小学校学習指導要領(平成 29 年改訂)と算数科 ３．算数学習の現状と課題(各種調査の結果から) ４．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(1)背景・考え方・授業づくり） ５．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(2)授業づくり(その１)） ６．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(3)授業づくり(その２)） （小中接続及び義務教育と高等学校教育の接続の観点から中学校･高等学校等の数学科教諭も対象とする。）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	４人（うちオンライン型１人）

開講日	令和３年（2021 年）９月 20 日（月祝）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（数学ソフトの活用①）
講習の概要	同時双方型の講習です。GIGA スクール構想で算数・数学教育も新しく変わります。情報機器は通信機能だけでなく、算数・数学教育にも使えるようになり、この変化に対応する準備が必要となります。算数・数学の問題作成に情報機器は重要な役割を担うでしょう。情報機器活用の面白さを体得しましょう。生徒が「考える」ための手段として情報機器を活用できるよう、先生方が情報機器を実際に用いて授業を行うことを経験し、算数･数学の創造的な思考方法を学ぶ場にしたいと考えています。Work Shop 形式で行い、先生方の意見を尊重する研修を目指します。
担当講師	渡邉　信
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	12 人（うちオンライン型５人）

開講日	令和３年（2021 年）11 月 21 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（中学校数学科を中心に）
講習の概要	中学校数学科にかかわる内容を中心に次の構成で講習を実施する。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷（中・高等学校の数学科を中心に） ２．新中・高等学校学習指導要領（平成 29・30 改訂）と数学科 ３．数学学習の現状と課題（諸調査の結果から） ４．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現（(1)背景・考え方・授業づくり） ５．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現（(2)授業づくり(その１)） ６．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現（(3)授業づくり(その２)） （小中接続の観点から小学校教諭も対象とする。）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	12 人（うちオンライン型７人）

開講日	令和３年（2021 年）11 月 23 日（火祝）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（数学ソフトの活用②）
講習の概要	情報時代の算数・数学教育の研修をします。今後、算数・数学教育は情報機器の活用によって変化するでしょう。この講座では将来の算数・数学教育について考えます。情報機器は通信機能だけでなく数学的思考に欠かせない道具になるでしょう。このような時代の研修として、先生方が実際に情報機器を使って何ができるかを体験することは重要です。現在、算数・数学教育の中で情報機器を使っている先生方と語り合うことによって、自らが作り出す教育を考えましょう。□各自のパソコン（スマートフォン可）を使います。パソコン未経験者でも参加可能です。
担当講師	渡邉　信
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	７人（うちオンライン型４人）

イベントの実施

算数イベント

2022.02.24 算数イベント「数学マジックを作っちゃお！」（渡邉、松本）

参加者：釧路市立鳥取小学校５年１組および２組の児童

オンラインで指導した。

算額

学習数学研究所で算額の問題を２題作成し、2022 年 3 月 30 日「算額１・２・３」に公開した。

問題１.

建築物、美術品には黄金比や白銀比など私たちが美しさを感じる比が使われていることがあります。

大仏さまの各部位の長さを比較して、よく使われている比を見つけてください。

整数の比など独自の比でもかまいません。

問題２.

古来より僧侶は肉食を禁じられていたため、動物性の食材やにおいの強い野菜（ニラ・ニンニク・ネギ）などを使わない精進料理を食べていました。東大寺で食べられている精進料理は、とくに古式にのっとっていて結解料理といわれています。

大仏さまが召し上がる精進料理の献立と、必要な食材の種類、分量を考えてください。

【会議報告】

第 11 回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2021 年 5 月 7 日（金）13：00～14：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　2020 年度事業の件

2020 年度学習数学研究所事業報告（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第２号議案　2020 年度決算の件

2020 年度決算（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第３号議案　2021 年度事業計画の件

（１）学習数学研究所紀要

2019 年度および 2020 年度の活動をまとめて学習数学研究紀要第３・４巻として、７月に発行することが報告され、全会一致で承認された。

（２）免許状更新講習

9/19（日）、9/20（月祝）、11/21（日）、11/23（火祝）に開講すること、受講者の希望により対面型またはオンライン型で実施することが報告され、全会一致で承認された。

（３）検定問題研究会

毎月１回、実施後の検定問題に関する研究会を開催することが報告され、全会一致で承認された。

審議の結果、2021 年度事業計画は全会一致で承認された。

第４号議案　2021 年度予算の件

新型コロナウィルス感染症の影響を考慮しつつ経費削減を念頭に置き、経常経費を執行していく。別途 2021 年度の経費について検討する。審議の結果、全会一致で承認された。

第 12 回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2021 年 10 月 13 日（金）13：15～14：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第 1 号議案　2021 年 9 月免許状更新講習の件

免許状更新講習履修認定委員会より 2021 年 9 月 19 日および 20 日に開催した免許状更新講習の履修認定について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第 2 号議案　2022 年度免許状更新講習の件

中央教育審議会「「令和の日本型学校教育」を担う新たな教師の学びの姿の実現に向けて審議まとめ（案）」により教員免許更新制を発展的に解消することを求める案が文部科学省に提出された。審議の状況に応じて 2022 年度の講習について検討することが全会一致で承認された。

第 13 回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2021 年 12 月 1 日（水）13：15～14：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　2021 年 11 月免許状更新講習の件

免許状更新講習履修認定委員会より 2021 年 11 月 21 日および 23 日に開催した免許状更新講習の履修認定について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第２号議案　2022 年度免許状更新講習の件

教員免許更新制については、中央教育審議会で発展的に解消する方向で審議が進んでいる。2022 年度に関しては、新たな制度が制定された場合、研究所として関われることがあれば講習の開設等について検討することが、全会一致で承認された。

第３号議案　その他

（１）学習数学研究所紀要

2019 年度および 2020 年度の活動をまとめて学習数学研究紀要第３・４巻として今年度中に発行することが、全会一致で承認された。

（２）検定問題品質会議

2021 年度検定問題品質会議は、新型コロナウィルス感染症の感染拡大により中止することとし、委員には今年度実施した検定問題の評価を依頼することとした。

検定問題品質会議

新型コロナウィルス感染症の感染拡大の影響により、2020 年度に引き続き、2021 年度も検定問題品質会議の開催は見送った。

代替案として、実施後の検定問題の評価を依頼し、校種別（大学、高等学校、中学校、小学校）に意見をいただいた。

検定問題等検討会

2021.04.20（第41回）
　中村「KKT条件と機械学習（サポートベクトルマシン)」
　穂積「全階級の相関係数（１次検定と２次検定の相関）」
　渡邉「数学検定教科書から検定問題を考える」
　　参加者：渡邉、松本、中村、穂積
2021.05.25（第42回）
　穂積「芝浦工業大学（新入生対象）の受検者調査」
　松本「釧路市立鳥取小学校　第369回検定の結果分析」
　渡邉「CBT検定が始まるにあたって考えたいこと」
　　参加者：渡邉、松本、中村、穂積
2021.06.21（第43回）
　中村「線形回帰を例にしたベクトルによる微分」
　穂積「日数教の発表の途中経過」
　渡邉「芝浦工大数検受検」
　　参加者：渡邉、松本、中村、穂積
2021.07.26（第44回）
　「令和３年度全国学力・学習状況調査　中学校第３学年数学」
　渡邉「中学校学力テストから数学検定問題を考える」
　　参加者：渡邉、小宮、松本、中村、穂積
2021.08.25（第45回）
　「令和３年度全国学力・学習状況調査　小学校第６学年算数」
　穂積「２次方程式の調査の続編」
　　参加予定：渡邉、小宮、松本、中村、穂積
2021.09.28（第46回）
　「令和３年度全国学力・学習状況調査　中学校第３学年数学（調査結果から）」
　穂積「計算問題と応用問題の相関」
　　参加者：渡邉、小宮、松本、穂積
2021.10.25（第47回）
　小宮「令和３年度全国学力・学習状況調査　小学校第６学年算数（調査結果から）」
　中村「数学検定３級・準２級　おもしろ特有問題の紹介」
　穂積「２次方程式を解く際の受検者の考え方について（追加調査）」
　渡辺「問題は解けて当然と社会は認識」
　穂積「2011～2015年度における受検者の受検した目的（１～５級）について」
　　参加者：渡邉、小宮、松本、中村、穂積

2021.11.26（第 48 回）

松本「釧路市立鳥取小学校　第 369 回(2021.2.12)検定の誤答分析」

渡邉「社会の中のテクノロジーの受け入れ状況」

中村「カーボンニュートラルにおける「CO_2の数学」」

穂積「６～11 級の計算問題と応用問題の相関係数についての見解(追加調査)」

穂積「準１級～11 級における受検者数と受検者層およびその割合と経年変化について」

参加者（敬称略）　松本　小宮　渡辺　中村　穂積

2021.12.24（第 49 回）

中村「ユニークでタフな計算問題」

渡邉「データの範囲の意味」

穂積「第 381 回 6～11 級誤答調査」

参加者：渡邉、小宮、松本、中村、穂積

2022.02.04（第 50 回）

「大学入試共通テスト（数学ＩＡの必須問題)」

参加者：渡邉、小宮、松本、中村、穂積

2022.03.07（第 51 回）

「東京都立高等学校入学試験問題（数学)」

参加者：渡邉、小宮、松本、中村、穂積

第 44 回検定問題等検討会(2021.7.26)

中学校学力テストから数学検定問題を考える

１．特有問題では検定問題のほうが良い

学力テストは記述式にしたために「自由さ」がない

ヒントが書いてあり計算するだけ

何を測定したいのかが数学の問題になっているか分からない

２．問題の量(２０ページ)と時間(５０分)

問題は読むことが多い。説明が多いことは数学の考えることが少なくなる。

いらない説明が多すぎる。

最後まで読まないとやることが分からない。

おそらくこのような問題になれていたら、はじめは読まないで終わりだけ読む

３．「問題は、次のページに続きます。」は何を意味しているのか

数学検定の１次と２次を分けた？

問題にどのような「重み付け」がしてあるのか

記述式に重みをおいたら、80.8%の生徒は書く努力をしているので成績が良くなる

すべての問題が同じ得点を配分か？

記述式に取り組んでいる数値が高いことから「記述式」に重みを付ける

数学的発想を見ていない記述式

４．中学校で学ぶ数学が社会に出て役立つと思うときに具体的に何が役立つのか

「社会に出たとき」として考えられる数学は何と考えて出問しているのか

出題者側・生徒側

アンケートを見た一般市民（一般市民は数学が役立つとは思っていない？）

５．数学学力低下から数学学力崩壊へと進んでいることがアンケートから読み取れない

新しい高校教科書に四則演算の復習が 8 ページにわたり掲載

数学の授業の 80%の生徒はつまらないという現実

６．数学検定の問題はどのように変えるべきか

より易しく・より難しく・重要事項は必ず出題する・三平方などは避ける・・・・

学力テスト問題を見て変える必要はない・ある

（渡辺信）

第 46 回検定問題等検討会(2021.8.25)

小学校学力テストから数学検定問題を考える

１．今年の学力調査問題の違和感

今年の全国学力調査算数の問題「距離と速度」があった。インターネットで調べた数値と実際に歩いた時間が比較されている。

	道のり	時間	速度
実際に歩いた結果	1600m	約 22 分	500/7
インターネット	500	約 6 分	80

	道のり	時間	速度
インターネット	1600m	20 分	80m/sec
実際に歩いた結果	500	7	約 71

インターネットでは速度に「約」は付いていない。実際に歩いた結果では 500÷7＝71.42…で約 71 である。誤差のある数と正確な数の違いがこれからは重要になる。道のりを逆にしたらどうなるか。速度は前と同じにする。80m/sec＝4.8Km/h で歩く速度としては速すぎる。インターネットで調べた結果は数学で正確な数になるという感覚のもとで作られた問題である。

２．記述式の問題

時計を読むことから、針を書く

記述式にはヒントが書いてある（誘導型で穴埋め方式と変わらない）

記述式に 98.3%が積極的に挑戦している。この数字が何を意味しているか？

３．小学校で学ぶ算数が社会に出て役立つと思う 92.5%

算数の勉強は大切だと思う　　91.7

４．今回の問題点

(1) 有効数字の問題

(2) 図と問題が同じページにない不便さ

(3) 面積は移動しても変化しないことから平行四辺形の面積の公式への移行は不自然

(4) 記述式はヒント付き・マネをすればよい

(5) 会話方式は協力して学ぶ・コミュニケーション方式か

（渡辺信）

第48回検定問題等検討会（2021.11.26）

社会の中のTechnologyの受け入れ状況

1. Onlineでの教員研修

昨年に続いて今年も教員免許更新講習を Hybrid 型で実施した。遠くからの参加者が移動しなくても受験できることは素晴らしい。この1年間で変わったことは通信技能を使える教員が増えたことであろう。昨年は一週間前のZoom使用は大変であった。Zoomを初めて使う人とのOnline講座であり、Zoomの立ち上げから電話連絡をしなくてはならなかった。電話で話しながら講座当日までつながるかどうかが心配であったが、今年はZoomの活用は問題なく使える。一週間前の Test をする必要はなかった。Zoomによる会議が行われていて、ほとんどの人が簡単に入ることができる。1 年でものすごく変化した。大学でも先生方の通信機能活用は進んだ。だれもがOnline授業をしなくてはならず、通信機能は使えるようになった。使えない状況では日常業務ができないところに追い込まれた。このような先生方を見ているといろいろな方法を見つけ出し、いろいろな機能を使っている。一方、Zoomがつながるだけで画面共有にも時間がかかる先生もいる。学生よりも通信機能は良く使えるようになったと思う。

2. これからの評価

大学 Online 授業に対して最も困難であったのは試験であった。試験での不正防止の対策であったらしい。Online授業に対しては始まった2年前の評価は高かった。教室での対面授業より多くの質問があることや、実験実習での手元が見やすくなるなど良好であったが、現在では学力低下など深刻な問題点が聞こえてくる。最近Onlineでの問題点は、学生の学力低下、ゼミ指導での質的低下、定期試験の受講態度（不正の問題）などで困っている。外部からの問題点として入学試験の正式不良があげられている。マイナス面が話題になり、あまりプラスに積極的にOnlineを使うことを好まない。かつて今回のOnlineで用意した資料を来年にも使えると思っていた先生もいた。電子黒板がつかえるようになって授業が簡単になったという先生もいる。すべてが学生評価につながり、Online授業は授業の在り方、評価の問題点に困っている。そして最終的には元に戻ることを考えている節がある。

3. Technologyの受け入れ

通勤電車の中ではほとんどすべての人がスマホを見ている。朝のニュースを見るだけではなく、ゲームをしたり、漫画を読んでいる人も見受けられる。スマホは日常不可欠な道具であり誰もが使っている。音楽を聴いているのであろうか、体が自然に動く人もいる。しかし、スマホの中にある電卓を使う人はいない。πの値が3.14…とどこまで入っているかわからない。下500 桁まで見てもまだ続く。どこまで表示されるのかわからない。何に必要なのであろうか。四則演算や関数もいろいろと入っている。Technologyの受け入れは限定的で使われていることはごく一部なのかもしれない。（スマホでは何でもできるらしい。でもやってもらいたいことがないのが現状なのかもしれない）。調べれば何でも出てくる時代になった。しかし調べたいことは何かが問題なのかもしれない。電車の時刻調べは使える。何も考える必要がない。いくつか

のキーワードを入れたら答えが返ってくる。

4.　学校でのスマホ禁止はなぜ

最近の学生はノートを取らない。スマホは持っているがノートを持って授業を受けない。スマホで調べれば何でも書いてあるという。高校生の数学の宿題は教科書のページがわかれば答えが出てくる。その答えを見ながら問題を解くので、はじめから答えがわかっているという状況である。生徒は答えを書いてくれる人に感謝しているが、本当に親切な人なのであろうか。ただスマホの画面からノートに移すだけでやっていることはかわいそうな気がする。

（渡辺信）

検定問題研究会

2021 年度から毎月１回、実施後の検定問題に関する研究会を開催することとなり、４月６日に第１回の研究会を開催した。

2021.04.06（第１回）
　第 370 回２級２次：数理技能検定
2021.05.11（第２回）
　第 371 回２級２次：数理技能検定
2021.06.07（第３回）
　第 372 回準１級１次：計算技能検定、準１級２次：数理技能検定
2021.07.12（第４回）
　第 373 回２級２次：数理技能検定
2021.07.70（第５回）
　第 374 回２級２次：数理技能検定
2021.09.13（第６回）
　第 375 回３級２次：数理技能検定
2021.10.14（第７回）
　第 377 回４級２次：数理技能検定
2021.11.12（第８回）
　　第 378 回５級２次：数理技能検定
2021.12.07（第９回）
　第 380 回３級２次：数理技能検定
2022.01.17（第 10 回）
　第 384 回２級２次：数理技能検定の問題
2022.02.21（第 11 回）
　統計の問題（１～７級、大学入試共通テスト数学ＩＡ）
2022.03.25（第 12 回）
　第 386 回３級２次：数理技能検定

編集後記

2021 年度も新型コロナウィルス感染症（COVID-19）の影響により、各種の活動が制限されました。免許状更新講習は対面型とオンライン型を併用して実施しました。イベントに関しては、釧路市立鳥取小学校での算数イベントをオンラインで実施したことと算額を奉納したこと以外はすべて中止となっています。

数学検定に関する研究は充実度を増し、実用数学技能検定の答案や正答達成率、合格率に関する調査、公費受検している自治体の答案分析、他の試験と数学検定との比較等、多岐にわたる調査研究をしました。また、検定問題等検討会、検定問題研究会では活発に意見交換をしています。

2022 年度には日本数学検定協会における学習数学研究所の位置が見直され、新たな体制で幅広く研究活動を行うことになっています。

今後も算数・数学教育に対して提言できるよう、研究活動を続けてまいりますので、宜しくお願いいたします。

（松本　精一）

学習数学研究紀要　第５巻

発行日　2022 年 3 月 31 日

編集発行　公益財団法人 日本数学検定協会
学習数学研究所
所長　清水　静海

〒110-0005　東京都台東区上野 5-1-1
TEL　03-5812-8340
FAX　03-5812-8346

印刷所　サイトー印刷　株式会社