学習数学研究紀要

第３巻・第４巻

公益財団法人　日本数学検定協会

学習数学研究所

学習数学研究紀要　第３巻・第４巻　目次

巻頭言

数学の生涯学習を目指して

学習数学研究所
渡辺信(*)

数学の生涯学習をテーマとして研究する数学教育者は、現在の学会では一握りに過ぎない。数学を生涯学習として学び続けることを研究テーマにする研究報告書もほとんどない。数学をいかにして生涯学習の研究テーマにするかを問うた場合、生涯学習としての数学を対象としたこの紀要は価値があると考えられる。数学検定が生涯学習を目指し、毎年 30 万人以上の受検者が生涯学習の一環として数学検定を受検する。このような新しい数学教育を目指す中での研究報告は意義を持つであろう。

いまだに数学教育は学校教育が中心であり、その枠を出ることがない。学校教育を卒業すると同時に数学の世界からも別れを告げる。文系志望者は高校数学 I を終わると数学から解放されることを喜び、再び数学を志すことはない。また理工系に進むためには数学が必要不可欠であっても、数学を公式暗記科目として考える。誰もが楽しく数学を学び続ける社会ではなく、受験にための数学として学校の数学は嫌われてきたかもしれない。文系理系を問わず、数学を学び続ける社会にはなっていない。数学を学び続けることができる社会は、まさに生涯学習が構築された社会である。文化の中に数学が根付く社会を生み出すためにも、生涯学習として数学を学ぶ必要性がある。多くの人が社会の中で数学を学び続けることができたならば数学は社会の文化になる。そのためにもこの紀要が役立つことを望みたい。

「数学嫌い」「数学離れ」等の学校教育における数学教育の問題点は解決できないまま、数学教育は数学を楽しむことからは離れてしまった。しかし社会は数学的思考を重要視している。特にSociety5.0の時代では、技術社会で最も重要で必要な学問分野として数学を挙げた。数学の重要性を社会が要求し、多くの人が数学を学ぶことを推奨している。このような時代、社会の中で数学を学び続けることができることを目指したい。

日本数学検定協会の理念は「信頼性と有用性が高く、学習指針として広く認められる数学に関する検定授業を実施し、得られた知見を社会に還元することを通じて、世界中の人々の生涯にわたる数学への興味喚起と数学力の向上に貢献する。」であり、この理念を掲げた検定事業から得られた生涯学習としての数学研究をここにまとめて発刊できることは、数学教育にとって重要な示唆を与えることを疑えない。多くの数学教育研究者が数学の生涯学習に関心を示すとともに、学校教育の一つの目標として受け入れてくれることを期待したい。数学検定を通して、数学を楽しむ多くの人々と共に、数学の生涯学習は行われている。その人々と共に、また将来検定を受ける人々と共に、数学の生涯学習の研究を続けていく土台になる研究の報告を世に問いたい。

(*)公益財団法人日本数学検定協会常務理事・元東海大学理学部教授

人間としての輝きを求める生涯学習ー数学検定・算数検定への期待

公益財団法人 日本数学検定協会
評議員　羽中田彩記子(*)

学習数学研究所は、生涯学習の進展に寄与することを目的としています。これは、「算数・数学検定」の始まりから綿々と受け継がれてきたミッションです。生涯にわたる学習は、自由な意思で、自分に合った手段や方法で行われる必要があります。その環境を整えることが日本数学検定協会の使命であり、その推進に向けた取り組みの確たる根拠を探り実践へとつなげていくのが当研究所の役割と理解しています。

2000 年 3 月、私は、「日本数学検定協会」10 周年記念式典において、光栄にも「生涯学習功労賞」を頂戴しました。そこには、『「数検」を通して生涯学習の普及に努め、大きな功績を上げられました。』と記されています。社会全体が生涯学習への具体的な取り組みを進めている時代でした。社会の進展の根底を支える「生涯学習」への当協会の強い思いを改めて感じたのを今でも覚えています。当時、「算数・数学検定」は、受験者数の増加は続いていたものの、まだまだ歩き始めたばかりの存在でした。そして、今、あの時に皆が予想した発展以上の輝きを持ち続け、日本だけでなく世界の中で確かな存在となった日本数学検定協会の成果に心から敬意を表します。

1990 年、生涯教育に関する法律「生涯学習振興法」が制定され、世界的に生涯教育の必要性が語られるようになりました。その中、生涯学習という広い視野でだれもがどこでも算数・数学を楽しみ続ける場を提供することを目指して「算数・数学検定」が誕生しました。初期の検定問題作成から、学校での教科「算数・数学」とは一線を画す内容が求められました。「普段の生活に根ざした問題」「今、社会で課題となっているテーマを盛り込んだ問題」「結果だけでなく思考過程を問う問題」等、30 年を経た現在も注目される内容です。そして、今も「この問題で本当に良いのか？」「求められている記述式の問題とはどのようなものなのか」と、地道な問題分析と結果考察が日々積み重ねられ、よりよい問題を追究し続ける毎日が続いています。

生涯学習を推進するためには、各人の努力に対する確かな評価が重要です。小学校での算数検定の実施では、学年に拘ることなく、現時点での自分の能力を自己評価して受検する級を決定します。自分で決めたゴールに向かうためならだれもが努力します。算数検定の実施で輝く笑顔にたくさん出会うことができました。自分で決める、そして、努力をして結果を出し評価される。この経験が生涯学び続けようとする心に灯をともすと確信しています。

生涯学習には、2 つの側面があります。1 つは、私たちを取り巻く環境の急速な変化に対応するために常に学び続けることが要求されることによる生涯学習の必要性です。もう一つは、人間がもつ学びの意欲に係わって、知的好奇心をもって算数数学を楽しみ続けることで、よりよい自分を追究し充実感をもって生き続けることによる生涯学習の価値です。当協会と当研究所は、その両面を大切にしながら、人間として主体的、かつ豊かに生きるための人間教育を目的としていると考えます。絶えず自己啓発を続けることで、生きることの満足感をもち、社会の中でお互いの連帯感を高めることが実現します。算数・数学を通した人間教育への取り組みに大きな夢と期待を抱いています。

(*) 日本女子大学家政学部児童学科 特任教授・元東京都公立小学校長

学習数学研究所の取組に期待する

公益財団法人　日本数学検定協会
評議員　小宮　賢治(*)

公益財団法人として、日本数学検定協会は、国内外の人たちに対して算数・数学の学びの楽しさを与えたり、必要性を実感していただくために着実な仕事をしています。

今後も、一人一人の方たちに寄り添った形で発展していくことを期待しています。

協会の発展を支える中心となるのが、学習数学研究所です。

国内では、令和２年度から小学校で新学習指導要領による教育が展開されており、令和３年度から中学校で、令和４年度から高等学校(年次進行)で順に本格実施されます。今回の教育活動で重視されていることは、子供一人一人に寄り添った教育を展開し主体的な学びを大切にしていくことです。

子供が主体的な学びをするようになるためには、学ぶよろこびを得ることが大切です。

学ぶよろこびは、何から得られるのでしょうか。私は、次のような理由があると考えます。

①　今まで解けなかった問題を、自身の考え方や解法を見直して一生懸命取り組み、解けるようになること。
②　問題解決のために、複数の既習の学習内容の組み合わせ方や用い方が分かること。
③　解に至る筋道を丁寧に表現できること。
④　自分や他の人に、解に至る筋道や解を論理的に説明できること。
⑤　多様な解き方を発見したり他の人から学んで理解したりすること。
⑥　解法の論理の構成の美しさに感動すること。
⑦　友人と解法について疑問に思ったり考えたりしたことを話し合う中で、自分の考えを深く見直し学ぶこと。
⑧　問題解決したことを振り返って、新たな発展的な問題を見いだし解決すること。
⑨　算数・数学の学習内容が日常の生活と密接に関連していることを見いだすこと。　等

こうしたことを実感できるような問題、解法、解を示すために、学習数学研究所は、実用数学技能検定を中心とした研究、調査を実施しています。

私は、生涯学習の視点に立ったとき、特に、⑨の算数・数学の学習内容が、人々の日常の生活と密接に関連していることを発見したり、生活の中で利用したりすることが、今後、推進されなくてはならないと考えます。それは、算数・数学で用いる数学的な見方・考え方であってもよいと考えます。例えば、二等辺三角形で成立する性質は、二等辺三角形の特殊な形である正三角形でも成立するからと考えて角の大きさを求めた経験を生かし、ある図形で成立する性質を他の図形の問題解決に活用できないか考える。また、生活の中の問題も以前解決した内容・方法が利用できないか考えるといったことです。

子供から大人まで実用数学技能検定への取組を通して、学んだことを生活に生かせるようになっていただきたいと考えています。

今後も、算数・数学の学びを通じて学ぶよろこびを得られるように、学習数学研究所の調査・研究のより一層の推進を期待しています。

(*) 東京都教職員研修センター 教授・元東京都公立中学校長

【研究論文】

インド工科大学・入試問題研究（その１）

－　大学入試制度　－

学習数学研究所
中村　力

要約

インド工科大学（IIT）がなぜ高度な IT 人材を数多く輩出できるのか，
IIT の入試制度にスポットを当てながら，調査・研究した結果を報告します。

キーワード：
インド工科大学（IIT），高度 IT 人材

１．はじめに

「ゼロ」の概念を発見したのはインド人であるのは有名な事実ですが、
近年インドにおいてグーグルやソフトバンクの経営層など，IT 系大企業のトップを続々と輩出していることから，世界や日本でも一躍注目が高まっています。
その優秀な人材を輩出する一翼を担っているのがインド工科大学（Indian Institutes of Technology）です。IIT がなぜ高度な IT 人材を数多く輩出できるのか。本論文では、IIT の入試制度にスポットを当てながら，調査・研究に挑みます。

２．インド工科大学 IIT とは

IIT は，インドの工学と科学技術を専門とするインド最高峰の理工系大学で，
インド内の２３の国立大学の総体，またはその各校を指します（図１）。
IIT 各校はそれぞれ独立した組織で，学校運営の企画・実施を自ら行っているため，
大学間の違い（すなわち格差）も見受けられます。

３．入試制度の仕組み

優秀な人材を輩出する理由の１つには，　IIT の入学試験が世界三大難関試験の１つのされており，入学後も，競争率１００倍超の難関をくぐり抜けた俊英たちが互いに切磋琢磨し合っています。

（１）JEE　Main　と　JEE　Advanced

インド工科大学（IIT）が中心となって行われている JEE（Joint Entrance Examination）という試験があります。基本的にエンジニアを目指すための試験で，JEE　Main　と JEE　Advanced　の２段階があります。出題科目が両方とも物理，化学，

数学の３科目のみです。JEE　Main を受験しなければ JEE　Advanced を受験する資格が得られないので，日本の大学入学共通テスト（2021年より開始）と大学個別試験（二次試験）に近い制度といえます。

JEE　Advanced では，JEE　Main 合格者トップ２５万人から最終的に１万人程度の合格者に絞られ，その成績順に希望する学校と学部を選べる方式になっています。特にコンピュータサイエンスを目指す学生が多いので,その学部は熾烈な競争になります。

このように１００万人の志願者から最終的に１万人が入学，すなわち約１００倍という非常に厳しい競争率になってしまいます（図２）。

図１　インド国内の IIT マップ

JEE Main vs JEE Advanced Highlights

Particulars	JEE Main	JEE Advanced
Number of Attempts	3 (Attempting both the sessions of the same year is counted as 1)	2
Candidates Appeared (2020)	9,21,261	2,50,000
Mode of Language	English, Hindi and Gujrati	English and Hindi
Eligibility	Qualified class 12th from a recognized Government Organization	Ranked among top 2,50,000 JEE Main rank holders
Number of Papers	3	2
Topics Covered	Physics: Electronic Devices, EM Waves and Communication Systems Chemistry: Biomolecules and Chemistry in Everyday Life Mathematics: Sets, Relations and Functions, Statistics and Probability, Trigonometry and Mathematical Reasoning	Physics: Blackbody radiation, Kirchoff's law, Newton's law of cooling, Absorptive and Emissive powers, Wien's Displacement Law, Stefan's Law. Chemistry: Biomolecules and Chemistry in Everyday Life Mathematics: Algebra, Vectors, Differential Calculus, Integral Calculus,
Conducting Authority	National Testing Agency (NTA)	Indian Institute of Technology, Delhi (IIT, Delhi)

約１００万人

２５万人

図２　JEE　Main　と　JEE　Advanced　の比較

最終的に，
１万人ほどに絞られる！

（２）JEE　Advanced　について

ここでは，JEE　Advanced　を中心に解説します。

JEE　Advanced は，午前中に３時間で Paper1 を，午後も３時間で Paper2 を受験します。Paper1，Paper２とも物理，化学，数学の３科目をまとめて一気に３時間で行います。

ちなみに2020年は，図３に示すように９月２７日に実施されました。なお，2020年は新型コロナウイルス感染の影響で２度ほど日程を延期したようです。

Date of Examination	**Sunday, September 27, 2020**
Paper 1	09:00 IST to 12:00 IST
Paper 2	14:30 IST to 17:30 IST

図３　JEE　Advanced　2020　の日程

JEE　Main は早くから CBT（computer　Based　Testing）化していましたが、
JEE　Advanced は紙の時代が長かったようです。しかし最近では JEE　Advanced も CBT 化が普通になってきました。

解答は選択式や数字のみ解答する方式ですが，各設問について複数の選択肢が正解になる場合は，部分点が得られたり，無回答では０点でも間違った選択肢を選ぶと負の得点（つまり減点）になってしまうので，日本人にはなじみのない仕組みかもしれません。

図４では，４つの選択肢から１つだけ解答を選ぶ問題の場合，正しい選択肢を選んだ場合は３点，無回答（マーク無し）では０点，間違って解答すれば－１点と減点されることを説明しております。

PART-III (MATHEMATICS)

SECTION – 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen.
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).
Negative Marks	: –1	In all other cases.

図４　JEE　Advanced 採点方式例

４．インド工科大学の数学入試問題（JEE　advanced）の特徴

本論文では，具体的な数学の問題までは紹介しませんが，以下のような特徴があります。

●短時間（１問当たり３分程度）でかなりタフな問題を解答（マークシート）しなければなりません。これは他の物理や化学でも同様でしょう。

●計算機・電卓類の使用はできません。つまりひたすら，紙とペンで計算・解答することになります。

●選択肢（マークシート）形式ですが，間違った解答をすると減点されます。
通常の選択問題では，出鱈目に答えを選択しても得点につながることがありますが，IIT では解答できない問題はそのまま無回答の方が無難なようです。

●計算力はもちろん，短時間で解く解答力・精神力（タフネス）を十分鍛えておく必要があります。

５．結語

インド工科大学の入学試験制度から，優秀な人材を輩出する理由や背景が見つけ出せるのではと考え，インド工科大学の入学試験制度について調査し概要を記しました。

この驚異的な調査結果はかなりのインパクトに値すると思われます。本論文の続編としてインド工科大学の入試問題は実際どのようなものか，特に数学の入試問題に触れながら，インド工科大学の優秀な人材を輩出する源流をさらに深掘り調査を行っていく予定です。

引用・参考文献

［１］ インド・シフト　武鑓行雄著　PHP 研究所　2018 年

［２］ 最後の超大国インド　平林 博著　日経 BP 社　2017 年

［３］ すごいインドビジネス　サンジーヴ・スイィンハ著　2016 年

［４］ すごいインド　サンジーヴ・スイィンハ著　2014 年

［５］ インド数学の発想　矢野道雄著　NHK 出版新書　2011 年

［６］ インドへの扉　藤田寿仁著　カナリアコミュニケーションズ　2017 年

［７］ 日本人とインド人　グルチャラン・ダス著　プレジデント社 2020 年

＜ネット関連＞

［８］ インド工科大学の概要

・ウィキペディア（Wikipedia）

・https://www.sbbit.jp/article/cont1/35620

［９］ インド工科大学入試制度の仕組み

https://collegedunia.com/news/e-301-difference-between-jee-main-and-jee-advanced

数学の生涯学習における「数学」とは何か？

―生涯学習の形態に関する考察―

学習数学研究所
特別顧問　一松信(*)

要約

数学の生涯学習が提唱され、その実践も進んでいる。しかしそこでしばしば、“数学”という語が明確に定義されずに使用され、混乱を生じている。近年の数学は必ずしも論理的思考だけでなく、抽象化・モデル化の手法が重要なことを主張する。合わせて生涯学習を含む学校外教育のいくつかの形態を考察し、そのための対策や問題点をも論ずる。そのための具体的進め方や、個人的な提案も若干述べた。生涯学習の概念と、そこにおける数学の意味について、議論を深める一つの端緒となることを期待する。

キーワード：生涯学習、“数学”の意味、学校外教育、少人数共同学習

１．数学の意味

⑴なぜ問うのか

近年数学の生涯学習の重要性が指摘され、その研究／実践も蓄積されてきている。しかしながら、しばしばそこでいう“数学”の意味／内容について、その定義を不明確にしたまま、無意味に近い論争が繰り返されてきた傾向が否定できない。そこで改めてまず現代の数学の特質を反省し、学習者が数学の意味を豊かにとらえることを可能にするような方策を提示する必要があると思う。

もちろん、“数学とは何か”といった大問題を簡単に論ずることはできない。以下においては“数学”という語を、学校で学習する“狭義の数学”に限定せず、“数理的諸科学”とでもいうべき広義に使用することを、前提として注意しておく。現在の日本での学校教育で重点とされている“計算技法”に関しては、テクノロジーの活用を主とする観点から、以下では論じない。

⑵現代数学の本質

多くの論者が“数学”という言葉に込めている暗黙の前提は、“論理”のような印象を受ける。

もちろん論理的思考は、数学を学習する一つの重要な目標である。しかしそれだけでは片手落ちだと感じる。現代の数理的諸科学の根本は“モデル化”、すなわち現象の重要な点を抽象化した数学モデルを作り、それを数学的手法によって解析する技法である。その解析にはコンピュータによるシミュレーション技術などが必然的に関与する。

(*)公益財団法人 日本数学検定協会名誉会長・京都大学名誉教授

モデル化の手法は、物理学・天文学などの分野では、古くから当然の技法であった。近年ではそれが広く諸分野に適応され、数理生物学／数理医学あるいは数理経済学だけでなく、“数理社会学”とでもいう分野にも及んでいる。

モデル化とその解析自体は、むしろ数学の“研究”であって生涯学習の枠外かもしれないが、その観点を無視してはなるまい。

⑶数学は発明か発見か？

数学の本質に関連して、標題のような設問が昔からある。それは必ずしも20世紀になって公理主義的数学が普及したためではない。例えば非ユークリッド幾何学の構成・発展は、その当初は発見というよりも“発明”だったかもしれない。現在において、もしも新しい公理系を提唱してそれから新体系を構築する作業が可能ならば、それはむしろ“発明”というべきであろう。

ただし末尾に引用した最初の文献での所論は、それらとは異なる。そもそも点・線や数7などの諸概念が、実在の対象なのか（実在論的見地）、それともプラトンのイデァに象徴されるような作り事（理想的な世界）なのか、という議論である。

これと関連して“数学者の意識”が語られてよい。もちろん“意識されない対象はないも同然”という意見があるくらいなので、意識が無視できないけれども、ここで述べたいのはそれとは多少別の意味である。一例を挙げよう。

正多面体はユークリッドの原論第13巻以降、中世を通じて多くの研究があった。しかし

　　面の数＋頂点の数＝辺の数＋2

というオイラーの多面体定理は、ルネッサンス期（17世紀初頭）まで知られていなかった。これは研究者が拡がった面にのみ注目し、小さいが重要な要素である辺や頂点には無関心だったためらしい。逆に言えば、そういう部分にまで関心があれば、思わぬ発見があり得るという例だろう。

数学の成果が発見か発明かという議論は、意外と重要な論点かもしれない。しかし以下の議論とは関係が薄いと思うので、これ以上論ずることはしない。

当の引用文献の結論も意外と“中立的”である。すなわち数学の対象についての実在論／非実在論は、数学自体の営みにはたいして影響しない；必要に応じて、数学者は好みの解釈を選んでよい、という趣旨である。

（4）論理的思考力と読解力

数学の学力として、論理的思考力は本質的である。その養成に、古典的ユークリッド幾何学が最適の題材であることも事実だろう。もちろん思考力は数学だけに負わされる技法ではない。現在ではむしろ“情報科”でのプログラミングが適切な素材かもしれない。

近年、時折“数学検定”を初めいろいろな試験で、“冗長な文章”が問題にされているので一言したい。それは数学の問題として、立式し解くためには不必要な情報（歴史的な経過とか派生的話題など）が、問題文中に長々と記述されている場合である。

確かにそれは“狭義の数学的技法”（与えられた方程式を解くなど）から見れば、本質的

ではない冗長な部分である。しかし広義の数学力（特に前出の抽象化／モデル化の力）の立場を考えると、不必要な情報を捨てて本質を探り出す能力は、“読解力”の重要な一環と考えられる。しかも、一見冗長な文章の中に、ヒントが隠されている例もあった。その種の重要な試みと考えてあえて一言した。

２．生涯学習の形態

⑴総論

以下では本来の題目からは若干離れるが、生涯学習としてあり得べき形態について、若干考察したい。それが学習対象の数学とも関連することを考慮したためである。

生涯学習という語についても、具体的には諸種の目的／形態があり得る。以下に記すのは私の思いついた具体的な一例にすぎず、他にも多様な形態があると思う。

① 業務のために必要になった事項の学習。

② 目的は多様だが、既習の内容の再履修。

③ 全くの趣味としての研修。

以上が中心的と思うが、この他に

④ 優秀な生徒に対する英才教育（幼児教育も）

も、学校外教育／生涯学習の一環として考慮すべきだろう。ただし本稿では④は論じない。

この場合に本質的な出発点は、指導要領などに拘束されず、対象も方法も全く自由な点である。その意味で、将来の数学教育のための布石／準備といった観点も込めてよいかもしれない。

いずれにせよ、標準的な一斉授業／講習会といった形態だけでなく、個別／少人数共同学習の形になることも多いだろう。田舎で孤立している独学者に対しても、インターネットなどによる共同学習が考えられる。いずれもまだ試行的段階のように思われるので、今後、実践を通じて具体的方策を開発することも、重要な課題だろう。

⑵具体的な進め方（その 1）

前節に示した①，②の場面は、目的が明確なだけに、割り合い対応しやすいと思う。①では学生時代に履修しなかった題材だけでなく、その当時にはなかった（ないしほとんど扱われなかった）新分野の学習も含む。②については、例えば何かを人に教える立場になったとき、その昔学習した体系とは別の進め方を改めて学ぶ場合も含まれる。

これらについては、課題は比較的少ないかもしれない。必要に応じて大学の講義を聴講する、講習会に出席する、同様の目的をもったグループで自主ゼミを行う、などいろいろな可能性が考えられる。そうした機会がない場合でも、目的とする分野がよく知られていて、多数の教科書がある場合には、問題は少ないと思う。②の場合には、可能ならばその昔学習したのとは別のスタイルの教科書を使い、数学の進め方は決して単調な一本道だけではないことを自覚するとよいと思う。

⑶具体的な進め方（その 2）

問題が多いのは、(1) 節で述べた③の場合である。同好の士が何人か集まって、共同学習／自主ゼミの形が採れれば課題は少ない。適切な指導者がいて、少人数の共同重点学習ができれば理想的である。

少人数の達成度別学習は、ある意味では理想的な教育／学習の方法かもしれない。しかしそのためには膨大な人員・費用の裏付けが不可欠である。小規模の実験校で成功した例は多いが、それを一気に国全体で一律に施行しようとすると、必ず“規模の暴力”(費用などの非線型性) がきいてきて失敗に終わる。そのような実例は世界各国でこれまでに多数ある。

生涯学習の場合には、それほど大規模なものではないから、その点の考慮は不要だろうが、適切な題材と指導者／助言者の問題が残る。もちろん特に指導者がいなくて、互いに教え合い、学び合うのもよいだろう。

ここで大きな課題は、③において孤立した学習者である。しばしば袋小路に陥って脱出できなくなり、独りで悩むだけでなく、数学者に難題を持ちかけたり、誤った内容の論文を主張する場面が多い。“角の三等分”などはもはや過去の実例にすぎないが、今でも有名な定理に“反例”を主張する数学ファンは跡を絶たないようである。それにはインターネットなどによる協力も不可欠だろう。専門の数学者たちへも、ある程度の助力をお願いしたいと期待する。

３．一つの提案

以下は筆者の個人的な感想である。

学校教育においては、受験対策は別としても、時間の制約と指導要領の拘束があり、重要と思われる題材でも、ほとんど教えられずに卒業する場面が多い。

その意味では、生涯学習の一つの題材として、あえて過去の忘れられた数学の再発掘を提唱したい。

もちろん対数による数値計算とか、明治時代の小学校算数 (算術) で中心だった諸等数 (十進法でない諸単位で表された数値の計算) などは、もはや不要である。しかし本来ならば学習させたいが、時間の関係で割愛された題材も多い。昔の教科書を改めて読み返すと、意外と現在に生かせる面白い題材が少なくない。それらは将来学校教育に復活させることも考えられるが、単なる技術伝承ではなく、趣味としての生涯学習の題材に好適な可能性がある。何よりも数学的事実は正しければ“永遠の真理”であって、決して古くなることがない。

合わせて既知の結果の簡単な別証を試みることも、生涯学習者にとって適切な研究対象だろう。案外、簡単に証明できる定理に、伝統的な面倒な証明がまつわりついていて、難解とされてきた場合がある。そして残念なことに、新しい教科書に簡単な証明を書いても、伝統を重んじる教員の間で不評であり、採用されなかった場面があった。それでも色々と工夫してみる価値があると信じる。

４．むすび

以上、当初の“数学”の意味からは逸脱したが、生涯学習の理念と具体的方策について、若干の私見を述べた。これらはある意味で新しい概念であり、試行錯誤が欠かせない。一つのたたき台として、あえて私見を混えて提唱した次第である。

引用・参考文献

[1]K.ヒューストン・エドワース（日経サイエンス編集部訳）数学は発明か発見か　日経サイエンス　2019年12月号　35－40ページ（原題は　Number Game, Scientific American, Sept. 2019)

[2]足立恒夫　よみがえる非ユークリッド幾何　日本評論社　2019年

[3]一松　信　創作数学演義　2017年現代数学社，続編　現代数学社　2019年

暗記する数学

学習数学研究所
穂積　悠樹

要約
　数学は、少なからず暗記を必要とする学問であるが、解法や公式等をすべて暗記すれば太刀打ちできるなどといった迷信が中高生の間でよく見聞きされる。そうではないことは多くの先生方が理解されている。しかし、わずかではあるが、暗記させる必要のないような(意味のない)暗記を指導する先生がいることも事実である。ここでは、学習者に暗記させなくてもよい(させるべきでない)数学について考察した。

キーワード：暗記、公式、解法

１．暗記させる必要のないもの

・２次関数 $y=ax^2$ の変化の割合

　中学３年で２次関数 $y=ax^2$ を学習するが、ここで変化の割合の求め方を学ぶ。たとえば、関数 $y=ax^2$ において x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、次のように教わる。

$$(\text{変化の割合})=\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q-p)(q+p)}{q-p}=a(q+p)$$

　結果からみると、関数 $y=ax^2$ において x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は p と q の和に a をかけたものである。この事実だけを教える先生がいるという。

　たしかにこの事実は簡単でわかりやすく、試験でも計算ミスが減るだろう。しかし、ただそれだけであって、変化の割合とは何なのかが無視されているのである。

　ここで学ぶことは、高校で教わる微分で役に立つ。高校では２次関数以外にもさまざまな関数を扱うが、その際にも関数ごとに変化の割合の結果を覚えさせるつもりであろうか。

・放物線が x 軸に切り取られる部分の長さについて

　平成１７年とかなり古いことの話であるが、数検の準２級２次で次の問題を出題した。

> 問題．放物線 $y=x^2+2ax+2a$ が x 軸と異なる２点Ａ、Ｂで交わるとき、ＡＢ＝４となるように a の値を定めなさい。

この問題を解くにあたって、一般的には点A、Bの座標を a を用いて表し、線分ABの長さが４となる方程式をつくって a の値を求める。実際にその解法の受検者は多く見られた。ところが、ある受検者は次のように解いた。

ある受検者の解答

$$\frac{\sqrt{4a^2-8a}}{|1|}=4 \qquad 4a^2-8a=16 \qquad a^2-2a-4=0 \qquad a=1\pm\sqrt{5}$$

この解答を初めて拝見したとき、この解法が何に基づいたものなのかがよくわからなかったのだが、最初の等式さえ認められればあとは正解になる。そのため、最初の式を検討した結果、次のことがわかった。

一般に、放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ が x 軸に切り取られる部分の長さを d とすると

$$d=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

という関係式が成り立つ。ここで、D は２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式である。つまり、上の解法をした受検者は、これを公式として暗記していたことになる。

このような問題を解いていて、上の公式を自分で導いて覚えたということであれば、それはすばらしいの一言であり称賛に値するとは思う。しかしその場合は、さも一般的かのように解答欄には書かないのではないか。

これを公式として覚えても、発展性が無いように見えるため、それよりはこの公式を使わなくとも答えを導けるようにしたほうが有益といえるのではないだろうか。

・正三角形の面積

数検３級で、１辺が６cmの正三角形の面積を求める問題を出題したところ、次のように解答した受検者がいた。

ある受検者の解答

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}\quad (\mathrm{cm}^2)$$

一般に、１辺が $a$cmの正三角形の面積は、$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\ (\mathrm{cm}^2)$ と表されるが、これを公式として使っていた解答だった。これも先の事例と同じく、発展性が無いように見えるため、覚えずとも答えを導けるようにしたほうが有益といえるのではないだろうか。

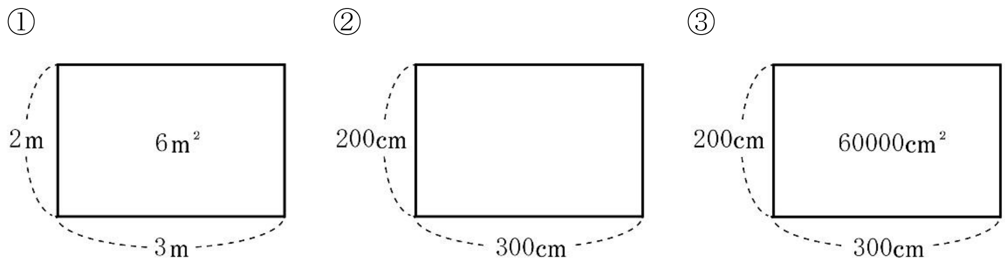
・面積・体積の単位変換

小学４年で面積の単位変換を学習し、小学５年で体積の単位変換を学習するが、ここで初めて算数に対し苦手意識をもつ人も少なくないだろう。なぜ苦手意識をもつのかといえば、長さの単位変換で１km＝１０００ｍ、１ｍ＝１００cm、１cm＝１０mmなどは覚えている人も多く、苦手意識も無いのだが、見た目でこれに似た単位の変換があるために混乱するのである。たとえば、面積であれば１km^2＝１０００００００m^2、１m^2＝１００００cm^2などで、体積であれば、１cm^3＝１０００mm^3などである。

数検８級や７級の受検者で調べた結果、回次にもよるが前者の長さの単位変換であれば正答達成率が９割前後であるのに対し、面積や体積の単位変換では正答達成率が５割前後まで落ち込む。かなり苦手意識があることがわかる。

このことは、単位変換の際に０を何個つければよいか(または何個取ればよいか)を覚えようとしている人が多いからと考えられる。しかし、これを覚えようとすると相当な数のパターンを覚える必要が出てしまう。

やはり王道ではあるが、面積や体積の単位変換は、一旦長さの次元まで戻って単位変換して考えるべきだろう。そのようにすれば暗記の必要は無くなる。たとえば、６m^2は何cm^2かという問いに対しては、面積が６m^2の長方形を１つつくり、その長方形の１辺の長さをcmで単位変換して、再度面積を求めればよい。



①　縦２ｍ、横３ｍの長方形をつくる(縦１ｍ、横６ｍなどいろいろ考えられるが、何でもよい)。

②　何cm^2かで問われているので、長方形の１辺の長さをcmに変換する。

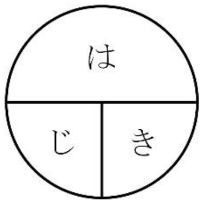
③　②の状態で面積を求める。

これで、６m^2は６００００cm^2であることがわかる。同様にして、体積の単位変換にも対応できる。

また、a(アール)やha(ヘクタール)の単位変換の場合、この２つの場合だけ例外として暗記させるのもありだとは思うが、１aは１辺の長さが１０ｍの正方形の面積、１haは１辺の長さが１００ｍの正方形の面積とだけ覚えておけば、いろいろと応用ができる。

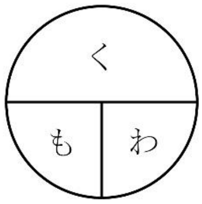
・速さ・割合の求め方

現在は小学５年で学習することになったが(昨年までは小学６年)、速さを求めるには、距離を時間で割ればよい。これを、右の図のようなものを使って教える先生がいるという。しかし、「は」「じ」「き」の位置まで覚える必要があり、これを忘れた途端に問題が解けなくなるという。



この図を覚えるよりも、速さの定義をしっかりと覚えたほうが大いに意義がある。たとえば、「時速３０km」とは１時間で３０kmの距離を進む速さだということを理解しておくだけで、いろいろと応用が可能である。この速さで３時間進み続けると９０km移動することになるし、この速さが分速何mなのかと問われても、６０分で３００００m進む速さである訳だから１分で５００m進む、すなわち分速５００mだということもすぐにわかるのである。

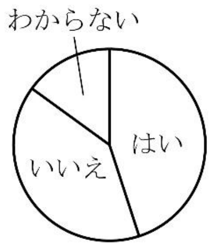
割合も同様で、右の図のような速さの求め方に似た図があるらしい。「く」はくらべる量、「も」は元にする量、「わ」は割合なのだそうだが、これも速さのときと同じく、位置まで覚える必要があり、これを忘れた途端に問題が解けなくなる。また、問題によって「く」や「も」が何に相当するのかもわかりにくい側面があり、暗記だけでは太刀打ちできない。



数検の受検者の解答を拝見しても、計算で割合を求めるにあたって、割り算が必要なのは理解しているようなのだが、割る数と割られる数を逆にするケースが後を絶たない。これは初めて割合を学習する小学５年生が多くを占める７級に限らず、中学３年生が多くを占める３級でも同じ傾向がみられる。正答達成率も、７級で約３割、３級でも約５割と低い。

割合の計算だが、右の円グラフで考えてみるとわかりやすい。

右のグラフは、３６０人にあるアンケートをとった結果で「はい」と答えた人が１６２人、「いいえ」と答えた人が１４４人、「わからない」と答えた人が５４人いたとする。このとき、「はい」と答えた人の割合は、$\frac{162}{360}=0.45$(百分率では４５％)である。このように分数で考えるやり方を教われば、割り算で式を立てる際に割る数と割られる数を逆にする人は随分と減るだろう。



速さも割合も、目には見えないためにイメージがしにくく、苦手意識が生まれやすい分野である。だからこそ、暗記ではなく定義を大事にしてもらいたい。

・つるかめ算、流水算などの考え方

これは中学入試を考えている人には反論があるかもしれないが、つるかめ算、流水算のような解法は、中学１年で学習する１次方程式さえ学べば不要である。したがって、中学入試を考えていない人は、まったく覚える必要はないのである。

このほかにも、旅人算、植木算、通過算、相当算、時計算、年齢算、…と、まだまだ他にもあるようだが、これらはそれぞれ解法を覚えなくてはならず、とても現実的とはいいづらい。これら１つ１つの解法を覚えるくらいなら、先取り学習にはなるが、１次方程式を教えたほうが有益に思える。余談ではあるが、これら特殊算と呼ばれる解法は細かく分けると２０種類以上あるともいわれる。

・場合の数の考え方

高校１年になると、数学Ａの場合の数の単元において、順列のＰや組合せのＣといった計算を学習する。その際に、並べるシチュエーションのときはＰ、選ぶシチュエーションのときはＣと覚えている人が多いようである。あながち間違いでもないのだが、たとえば５人の中から委員長と副委員長の２人を決めるときの場合の数は何通りかと問われたとき、これは${}_5\mathrm{C}_2$ではなく${}_5\mathrm{P}_2$である。

並べるときはＰ、選ぶときはＣと機械的に覚えている人は、ここに落とし穴があるので、十分に注意してもらいたい。

２．暗記は必要だが、問題によって使い分けるべきもの

・２次方程式の解の公式

中学３年で２次方程式の解の公式を教わる。解の公式は、どんな２次方程式でも正しく使えば必ず解ける代物である。だからといって、解の公式だけを覚えさせたところで正しく使いこなせるのかというと、そうではないことが次ページの表１のデータからよくわかる。ここで表１の(19)の問題を、多少の違和感はあるかもしれないが、$ax^2-c=0$（$a>0$、$c>0$とする）の型とし、(20)の問題を、$ax^2+bx+c=0$の型と呼ぶことにする。表１から、簡単であるはずの $ax^2-c=0$の型よりも、$ax^2+bx+c=0$の型のほうが、正答達成率が高くなりそうだといえる。

(20)の正答達成率から判断すると、それなりの数の受検者が解の公式を暗記していることがわかる。しかし、(19)のほうが正答達成率が低くなる傾向がありそうだというこの現象は、２次方程式の解の公式がどんな型にでも使えて万能だからといって、暗記だけさせてしまった結果によるものではないだろうか。もちろん、２次方程式の解の公式は万能であるし、暗記したほうがよいということは理解できる。しかし、(19)の $ax^2-c=0$の型に対しては、解の公式など使わないほうがよいことは言うまでもない。

２次方程式の解の公式は、２次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）の解が $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ というものであるが、(19)の型は $b=0$の場合であり、正しく使えば正解は導き出せる。このことから、解の公式を暗記していても使いこなせていない人がそれなりにいることがわかるのである。

２次方程式の解の公式は、是非とも暗記してもらいたい代物である。ただ、暗記することも大切だが、解の公式を導けるようになり、公式の成り立ちなども知ってもらいたいとも願う。さらに、さまざまな２次方程式の問題を解くことによって、解の公式を使う必要があるのか、因数分解で解けないかなど、問題によっていろいろな見方をする習慣をつけることも大切だろう。

表１

２次方程式の問題の正答達成率

回次	小問(19)	(19)の正答達成率(%)	小問(20)	(20)の正答達成率(%)
第348回(12月)	$320-5x^2=0$	69.2	$x^2+6x+6=0$	77.6
第347回(11月)	$9x^2-10=0$	52.9	$3x^2-4x-3=0$	68.8
第346回(11月)	$2x^2-108=0$	55.2	$2x^2-6x+3=0$	63.5
第345回(11月)	$3x^2-60=0$	67.3	$3x^2-x-1=0$	72.5
第344回(10月)	$64x^2-11=0$	56.8	$x^2-7x+7=0$	81.4
第343回(10月)	$5x^2=140$	68.2	$2x^2-3x-3=0$	77.3
第342回(9月)	$x^2-32=0$	71.6	$x^2-4x-4=0$	69.5
第341回(8月)	$3x^2-72=0$	53.5	$x^2-3x-5=0$	64.5
第340回(7月)	$2x^2-108=0$	53.1	$x^2-8x+1=0$	60.8
第339回(6月)	$x^2-48=0$	49.2	$x^2-6x+7=0$	43.9
第338回(6月)	$4x^2-36=0$	45.0	$3x^2-5x+1=0$	52.9
第337回(6月)	$x^2-20=0$	45.1	$5x^2-2x-2=0$	26.4
第336回(4月)	$4x^2-23=0$	36.5	$x^2+2x-7=0$	45.1
第335回(3月)	$x^2-20=0$	40.3	$2x^2+7x+2=0$	49.5
第334回(2月)	$16x^2-5=0$	34.5	$6x^2-2x-1=0$	33.6
第333回(2月)	$25x^2-1=0$	26.3	$x^2-4x-1=0$	46.7
第332回(1月)	$8x^2-72=0$	50.9	$3x^2+5x-1=0$	57.6

※同一回の(19)と(20)は、同一の受検者層である。

※網掛は、(20)の正答達成率が(19)よりも低かったものである。

※第342回と第339回の(20)は、因数分解ができると勘違いした人が多くいた可能性あり。

※第337回と第334回の(20)は、x^2の係数が他の回よりも大きめであるのが正答達成率に影響した可能性あり。

※第335回と第337回の(19)は、別の目的の調査のため、同じ問題が出題されている。

３．一部を暗記するだけで十分なもの

・解と係数の関係

高校２年の数学Ⅱで２次方程式の解と係数の関係を学習する。これは虚数解でも成り立ち、２次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の２つの解をα、βとすると、$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ という関係が成り立つというものであるが、マイナスの符号の有無、分子の混同等による誤りが決して多くは無いが見られる。実際に数検２級１次を参考にすると、ある２次方程式の虚数解を求める問題の正答達成率は約７割であるのに対し、解と係数の関係を使う問題の正答達成率は約５割に留まった。

これも、解と係数の関係を暗記していなくても、先の２次方程式の解の公式さえしっかり覚えていれば対応できる。解と係数の関係は、$\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ としてこれらの和と積を求めると、簡単に導くことができるからである。

・球の体積・表面積の公式

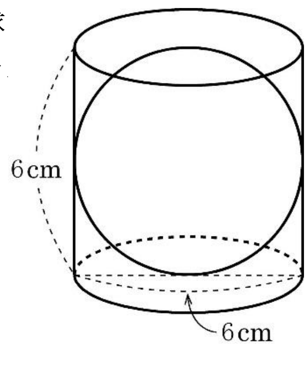
平成２４年まで、球の体積・表面積の公式は高校の数学Ⅰの範囲であったが、その後は中学校１年の範囲に移った。一気に３学年もの前倒しになった訳であるが、そもそも球の体積・表面積の公式を高校で教えるようになったのは平成１４年からであって、それ以前ではやはり中学で教わっていたものである。ちなみに球の体積・表面積を求める問題は、中学で教わろうと高校で教わろうと正答達成率に変化は見られず、苦手意識の強い傾向が見られた。数検の受検者の傾向でいうと、どちらの正答達成率も３割前後となる。正答達成率が変わらないということから、苦手意識は見られるものの、中学１年で学習するのが早いという訳ではないことがわかる。

ちなみに、平成２１年１月３１日に実施された第１６４回準２級２次検定において、次の問題を出題した。ちなみに準２級を受検する高校１年生の割合は、回次にもよるが約７～８割である。

問題．右の図のように、高さ６cm、底面の直径６cmの円柱の缶に球を入れて密封しました。球が円柱にぴったりと収まっているとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率を３．１４とします。

（１）　円柱の缶の体積を求めなさい。この問題は答えだけを書いてください。　（正答達成率　67.6%）

（２）　円柱の缶と球の隙間にある空気の体積を求めなさい。　（正答達成率　22.6%）



円柱の体積は、現在小学６年で学ぶ。小学６年生が多くを占める数検６級の受検者の傾向として、円柱の体積を求める問題の正答達成率は、回によって異なるが、大体７割前後である。（１）の問題は小学６年でも解ける訳であるが、小学生でも高校生でも正答達成率に差が見られなかったのは残念であった。

注目すべきは（２）の問題で、球の体積は（１）で求めた体積の $\frac{2}{3}$ である訳だから、それを（１）の答えからひけばよいだけである。これさえ知っていれば、（１）が解けた人は（２）もほぼ解けるはずである。しかしながら、（２）の正答達成率を見ると、（１）が解けた人の３人に１人しか正解していないことがわかる。

（２）の問題が不正解だった受検者の解答のようすを拝見する限り、球の体積の公式である $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ を使おうとして間違えた解答、または何をしたらよいのかわからず手がつけられなかったような解答が多く見受けられた。

中学校学習指導要領解説（数学編）を参考にしたところ、球の体積や表面積の公式を覚えるといった記述はなく、たとえば球の体積は「それがぴったりと入る円柱の体積の $\frac{2}{3}$ である」と書かれている。球の体積を求めるにあたっては、覚えておくことはそれだけで十分なのである。また、球の表面積であれば「それがぴったりと入る円柱の側面積と等しい」ことだけを覚えておけばよい。

・乗法公式

中学３年で多項式の展開・因数分解を学ぶが、その乗法公式として次の４つの公式を覚える（因数分解は逆）。

乗法公式

$\boxed{1}$ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$\boxed{2}$ $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$\boxed{3}$ $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$\boxed{4}$ $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

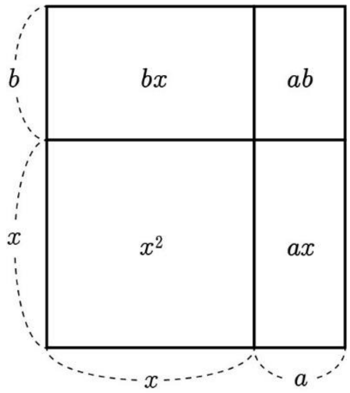
これら４つの公式は、因数分解の分野で逆の計算をするため、ある程度は暗記したほうがよいとは思うが、暗記していないからといって展開自体ができない訳ではない。とくに $\boxed{3}$ にいたっては、$\boxed{2}$ の式に $a=-b$ を代入すると

$$\{x+(-b)\}^2=x^2+2(-b)x+(-b)^2=x^2-2bx+b^2$$

となり、$\boxed{3}$ の公式が導ける。高校以上では「a を $-a$ に置き換える」という言い方もあるが、中学生には理解しづらい側面もある。だが、どちらにしてもこの考え方は高校に入ってからも学ぶため、暗記量を減らす意味も含めて中学３年のうちから触れておくとよいだろう。

ちなみに$\boxed{2}$、$\boxed{4}$の式も、$\boxed{1}$の式を覚えておけば簡単に導ける。$\boxed{1}$の式で、$b=a$を代入すると$\boxed{2}$が、$b=-a$を代入すると$\boxed{4}$が導けるのである。

$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$は、$\boxed{1}$の式から導くことができるが、$\boxed{1}$の式自体を忘れてしまっていても右の図の面積で考えれば簡単に導くことができる。



$(a+b)(c+d)$の展開を下のやり方だけ覚えている人もいるが、なぜそのやり方で正しく展開できるのかということを知るのはもっと大事である。

$$(a+b)(c+d) = \underset{①}{\underline{ac}} + \underset{②}{\underline{ad}} + \underset{③}{\underline{bc}} + \underset{④}{\underline{bd}}$$

・外分点の公式

高校の数学Ⅱで、内分点・外分点の公式を学習する。数直線上の２点Ａ(a)、Ｂ(b)に対して、線分ＡＢを$m:n$に内分する点をＰ(p)、線分ＡＢを$m:n$に外分する点をＱ(q)とすると、p、qはa、bを用いて次のように表されるというものである（ただし、外分のときは$m\neq n$）。

$$p=\frac{na+mb}{m+n}、\quad q=\frac{-na+mb}{m-n}$$

外分の公式は、内分の公式でnを$-n$に置き換えたものである。したがって、内分の公式さえ覚えておけばよいことになる。このことに触れている教科書もあるが、まったく触れていないものもあった。

外分の公式を使う問題は、内分の公式を使う問題よりも若干正答達成率が下がる傾向がある。また、公式を使わないような外分点の位置を示す問題で、外分の理解が不十分な解答も散見される。つまり、外分の意味を理解していないものの公式は使えるという人もそれなりにいるようである。

・かけ算九九

小学２年でかけ算を学習する。そこで九九を暗記するのだが、交換法則が成り立つことを先に触れておけば、８１通りすべてを暗記しなくても、右の図の網掛け部分の４５通りだけ覚えておけば十分である。さらに、１の段の答えはかける数と同じだということで、これも除外すれば実質３６通りだけ覚えておけばよいことになる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

ただ、九九は歌で覚えるケースが主流であり、すべて覚えるのにさほど苦労はしない。かけられる数がかける数よりも大きく、答えに自信がない場合のみ、かけられる数とかける数を逆にするという考え方でもよいだろう。

４．必ずしも暗記する必要はないが、暗記しておくと役に立つもの

・無理数の近似値

無理数にはπ、$\sqrt{2}$、eなど、いろいろある。これらの近似値は、試験の問題を解く際に与えられていることが多いので、必ずしも覚えておく必要はないが、覚えていれば役に立つこともある。

たとえば、円周率πは約３．１４であるが、この値を知っていれば中学の図形の問題でおおよその長さや面積などを求めることができ、計算間違いに気づきやすい。πを約３として計算すると、円とその円に内接する正n角形を考えたとき、$n \geqq 6$で互いの周の長さの大小関係に矛盾が生じるため、円周率は最低でも小数第２位までは暗記すべきだろう。

平方根や自然対数の底などの近似値も同様で、覚えておけば計算ミスに気づきやすいというメリットがある。ただし平方根に関しては、語呂合わせで覚えやすい$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$の値以外はとくに無理して覚える必要もないだろう。たとえば$\sqrt{23}$はどのくらいの大きさかといえば、$16 < 23 < 25$であるから、$4 < \sqrt{23} < 5$となり、整数部分が４であることがわかる。この考え方では小数部分までは詳しくはわからないが、５に近い値であることはわかる。自然対数の底eは、約２．７であることだけ覚えておくとよいだろう。

また常用対数は、$\log_{10} 2 = 0.3010$、$\log_{10} 3 = 0.4771$の値だけは覚えておきたいところである。この２つの値さえ覚えておけば、$\log_{10} 4$、$\log_{10} 5$、$\log_{10} 6$、$\log_{10} 8$、$\log_{10} 9$の値を計算で求めることができる。$\log_{10} 7$の値は、この２つの値だけでは正確に求めることはできないが、$\log_{10} 6$と$\log_{10} 8$の平均に近い値（実際に小数第２位まで一致する）とだけ覚えておけば十分に対応できるのである。

５．最後に

これまで、暗記しなくてもよいものを中心にまとめてきたが、暗記が駄目というよりはすべて暗記で対応しようとせずに、暗記は必要最低限に留めてもらいたいという意図で記した。すべて暗記でやり通そうとすると、応用が効かなくなるばかりでなく、ひらめきの機会すら失ってしまい、危険である。おそらくは文章題も解けなくなってしまうだろう。

今の時代は、いかに覚えているかよりもどのように考えたかが重要である。公式等もただ暗記するのではなく、なぜその公式が成り立つのかという疑問をもち、解決していくことを期待したい。

参考文献

[1]芳沢光雄「「%」が分からない大学生」光文社新書、2019 年

[2]穂積悠樹「生涯学習　記述式の答案から見られる傾向２」公益財団法人日本数学検定協会

[3]文部科学省「中学校学習指導要領解説 数学編」2011 年

[4]公益財団法人日本数学検定協会「第 101 回実用数学技能検定（数学検定）準２級」2005 年

[5]公益財団法人日本数学検定協会「第 164 回実用数学技能検定（数学検定）準２級」2009 年

[6]公益財団法人日本数学検定協会「第 332～348 回実用数学技能検定（数学検定）３級」2019 年

[7]公益財団法人日本数学検定協会「第 332、335、340 回実用数学技能検定（数学検定）２級」2019 年

[8]東京書籍「数学Ⅰ」「数学Ａ」「数学Ⅱ」「新編数学Ⅰ」「新編数学Ａ」「新編数学Ⅱ」2011 年

[9]数研出版「数学Ⅰ」「数学Ａ」「数学Ⅱ」2011 年

[10]啓林館「数学Ⅰ」「数学Ａ」「数学Ⅱ」「新編数学Ⅰ」「新編数学Ａ」「新編数学Ⅱ」2011 年

[11]第一学習社「新編数学Ⅰ」「新編数学Ａ」「新編数学Ⅱ」2011 年

[12]実教出版「数学Ⅰ」「数学Ａ」「数学Ⅱ」2011 年

割合に関する記述式問題の答案分析

ー算数検定の記述式問題の答案の分析を通してー

学習数学研究所
松本　精一

要約

2019 年 8 月 8 日第 101 回全国算数・数学教育研究（沖縄）大会幼稚園・小学校部会において、「割合に関する記述式問題の答案分析」と題した研究発表を行った。本稿は、このときの研究をもとに答案の調査分析を進めて再構成したものである。

割合については小学校第５学年で学ぶ。実用数学技能検定（算数検定）７級（おもな受検者小学校５年生）で出題した割合（比較量を求める）に関する記述式問題の答案を分析し、どのような解答が見られるか、正答および誤答についてその傾向を調べた。その結果、正答では公式を用いている答案がもっとも多いものの、１％にあたる量を求めて正答を導いているものなど、様々な工夫した解答が見られた。誤答では、公式の誤用がもっとも多かった。

キーワード：割合、比較量、基準量

１　研究のねらい

文部科学省小学校学習指導要領第３節算数第２各学年の目標及び内容〔第５学年〕１目標として、「(4) 数量の関係を考察するとともに、百分率や円グラフなどを用いて資料の特徴を調べることができるようにする。」とある。

今回の調査では、「数量関係」の「割合」の問題を扱った。「割合」は第５学年の中で定着が難しい内容である。実用数学技能検定（算数検定）の記述式問題の答案から、正答、誤答それぞれどのように解答したかを分析し、児童が「割合」の問題にどのように取り組んでいるかをまとめた。

２　研究の内容（方法）

算数検定７級の出題範囲は小学校第５学年と第４学年であり、受検者の多くは５年生である。正答や誤答をどのように導いたか分析できるように、7 級で出題した割合の記述式問題を選んだ。さらに問題間で比較しやすいよう出題内容をそろえて、基準量と割合（百分率）が与えられ比較量を求める問題とし、４題を選んだ。

第 262 回検定の答案で予備調査をし、解答類型として正答を６種類、誤答を６種類、部分点を１種類、合計１３種類に分類した。

・正答

①基準量×割合（公式）を用いた解法
②１％に当たる人数から比較量を求める解法
③①と②の中間的な解法
④方程式の考え方をとった解法
⑤２％や５％に当たる人数を用いる解法
⑥その他正答

・誤答

⑦公式及び割合の誤用
⑧公式の誤用
⑨割合の誤用
⑩減法を用いた誤答
⑪その他誤答
⑫無解答

・部分点

⑬式のみ正解

３　結果

（１）第 262 回検定

資料１は、第262回検定（2014.11.22実施）の７級に出題した問題及び解答類型の反応率、答案例である。（26）が記述式問題で、正答達成率は（25）41.9％　（26）40.4％　であった。正答に至らずとも記述の途中まで正しい答案にはある一定の点数（部分点）が与えられる。正答達成率とは部分点も考慮した平均点のことである。

(26)の記述式問題について見ると、受検者数は289人で、正答104人(反応率36.0%)、誤答164人(同56.7%)、部分点21人(同7.3%)であった。

この問題は基準量と割合が与えられて比較量を求める基本的な問題であるが、正答した受検者は40%に満たなかった。

・正答について

解答類型①は模範解答として示した解答で、比較量を求める公式を用いた解法である。全受検者の29.1%が模範解答通りの解法をとっており、正答者のほとんどがこの解法であった。②は１％に当たる人数が7.5人であることを用いた解法である。反応率は4.5%とやや高い印象である。③は①と②の中間の解法であり、×0.16を×16÷100と捉えていると考えられる。④は、比較量を□として「比較量÷基準量＝割合」の公式を用いた、いわば方程式を活用した解法である。⑤では750÷50＝15として２％が15人に当たることを用いた解法や、750÷10＝75、75÷10＝7.5として10%が75人、1%が7.5人に当たることを用いた解法が見られた。

これら正答の答案から、受検者は公式を用いるだけでなく様々な解法で問題に臨んでい

ることがわかる。算数の授業で重視されている、いろいろな観点から問題に取り組む姿勢が現れていると考えられる。

・誤答について

⑦、⑧は公式を誤ったのか、除法を用いている。割合及び基準量を求めるときに除法を用いることが影響しているのであろうか。⑦は百分率で表された割合をそのまま用いているので、公式の誤用と合わせて二重に誤りが見られる。この解答類型の反応率は4.8%と高めであった。⑨は乗法を用いているが、百分率で表された割合を小数に直していない。⑦、⑧、⑨は公式を正しく用いられていない誤答である。公式の意味を理解しないまま暗記する学習法では、このような誤りが起こる可能性がある。

⑩は減法を用いた誤りであり、割合そのものを理解していないと考えられる。

⑪その他誤答には、割合については理解しているが、問題文を読み取れていないと考えられる誤答がある。比較量を求める公式は活用されているようだが、求める人数が何かが読み取れていないようである。

また、割合そのものを理解していないと考えられる誤答が多く見られる。百分率で表された割合を人数と同等に扱って、たしたりひいたりしている答案もある。

⑫は無解答（反応率 26.3%）であるが、303 回（25）14.9%、253 回（25）14.2%、244 回（24）12.7%と比較して、無解答の反応率が高いことがわかる。253 回、244 回は小問の１問めが記述式問題であるが、262 回は小問の２問めであることと、また 262 回は他の３回と比較して問題文中に多くの数値が挙げられていることが影響していると考えられる。

（２）第 303 回検定

資料２は、第303回検定（2017.06.24実施）の７級に出題した問題及び解答類型の反応率、答案例である。（25）が記述式問題で、正答達成率は（24）66.0%　（25）59.5%であった。(25) の正答の反応率は56.1%と他の回次の割合の問題と比較して高めだった。

・正答について

解答類型①の公式を用いた解法が、正答の中ではもっとも多かった。②は他の回次の問題と比較して反応率が低い。１%に当たる人数が０．２５人となり、扱いにくかったのであろうか。

④で、□ではなくxを用いて式を作っている答案があった。中学校第１学年で学習する１次方程式に直結する解答である。

⑤は、この問題では１００(%)÷２５(人)を計算して１人が４%に当たることを用いて解答している。計算がしやすかったためか、反応率は3.0%と高めだった。

⑥その他正答のうち、割合を分数で表し、比の考え方を用いている答案があった。この解法は、割合以外にも比例関係にある２数を扱う様々な場面で活用できる有用な方法である。

また、２問めが不正解であった人数から、正解者数を求めている答案があった。この問

題では直接正解者の人数が求められるので、遠回りの解法ではあるが、正解者の割合から不正解者の割合を求めるという考え方は、補集合や余事象等今後の学習に役立つものである。

・誤答について

⑦から⑩までの誤答は少ない印象である。

⑪その他誤答では、⑦の除数と被除数を入れ替えた７２÷２５とした誤答が３１例あり、反応率は3.2％と高かった。公式の活用を誤り、７２÷２５が割り切れるために現れた誤答であると考えられる。

また、基準量×割合＝比較量の公式を用いているが、求める値を誤ったり基準量を誤ったりしている答案が見られた。

割合をそのまま求める人数としている答案もあった。

（３）第253回検定

資料３は、第 253 回検定（2014.7.12 実施）の７級に出題した問題及び解答類型の反応率、答案例である。（25）が記述式問題で、正答達成率は（25）55.8％　（26）32.1％であった。

・正答について

①の反応率は 43.2％と高く、そのため正答の反応率全体も比較的高くなっている。

②も１％に当たる人数が８．５人と求めやすく、反応率が 4.2％とやや高めである。

③から⑤までは、反応率は低かった。

⑤では、５０％や２％、１％に当たる人数を計算して、解答を求める答案があった。工夫のあとが見られた。

⑥その他正答では、女子の人数を求めて全体から引いている答案があった。

また、割合と人数が比例関係にあることを用いている答案があった。比例関係を活用すると、乗法を用いるか除法を用いるかが自動的に決まるので、有用性が高い。

・誤答について

⑦、⑧は公式を誤って除法を用いたと考えられるが、反応率がやや高かった。

⑨の反応率は低かった。

⑩は基準量－割合（百分率）という誤答で反応率は 1.4％と高くはないが、262 回 0.3％、303 回 0.2％、244 回 1.2％と比較すると高い。人数を見ると 253 回は 878 人中 12 人、262 回は 289 人中１人、303 回は 978 人中２人、244 回は受検者 166 人中２人となっており、253 回が多い印象である。

⑪その他誤答について、５０％に当たる人数は正しく求められているが、２％に当たる人数を２人としている答案があった。５２％を５２人と捉え比較量として、８５０人を基準量として割合を求めている答案があった。どちらも百分率で表された値と人数の区別がついていないと考えられる。

また、男女の人数を同数としている答案があった。これは、割合について理解していな

いと考えられる。

（４）第 244 回検定

資料４は、第 244 回検定（2013. 11. 15 実施）の７級に出題した問題及び解答類型の反応率、答案例である。（24）が記述式問題で、正答達成率は（24）38. 9%　（25）29. 5% であった。

・正答について

①の公式を用いる解法の反応率は 19. 9%と低く、そのため正答全体の反応率が 32. 5% と低くなっている。

②は１％に当たる金額が２８円であることを用いた解法である。262 回、253 回と比較して数値が扱いやすいと思われるが、反応率は 2. 4%と高くなかった。

③、④の反応率は低かった。

⑤は、２０％に当たる金額と５％に当たる金額の和として求める解法であるが、反応率は比較的高かった。２５％が１００％の１／４であるとして割引額を求めている答案もあった。

⑥その他正答では、割引後の値段を求め、定価から引いて割引額を求めている答案があった。

⑦公式及び割合の誤用、⑧公式の誤用の反応率は 262 回、253 回でも高めであるが、244 回は他の回次より高い。２８００÷２５、２８００÷０．２５の商が整数で得られるためであろうか。

⑨、⑩の反応率は低かった。

４　まとめ

４回とも公式を用いた解法の反応率がもっとも高かったが、この反応率が高い回次は正答全体の反応率が高く、低い回次は低くなっている。つまり、公式を覚えて正しく活用できる受検者が多い回次は正答の反応率が高いと思われる。

公式以外の解法については、問題で与えられた数値によって、扱いやすさが変化することが、反応率に影響するようである。

方程式を使った解法、比を使った解法、比例関係を使った解法等は、他の様々な問題に活用できる有益な方法である。

割合の学習では３種類の公式を学ぶことになるが、ただ暗記するだけでは公式の選択を誤る可能性がある。割合に限らず、公式を活用するには、その意味や求め方を正しく理解しておくことが重要である。

引用・参考文献

[1]文部科学省「小学校学習指導要領解説　算数編」2008 年

[2]松本精一「割合に関する記述式問題の答案分析－実用数学技能検定（算数検定）の答案の考

察７－」，公益社団法人日本数学教育学会日本数学教育学会誌，第 101 回大会特集号 2019 年（沖縄大会），pp109，2019 年
[3]公益財団法人日本数学検定協会「第 262 回実用数学技能検定（算数検定）7 級」　2014 年
[4]公益財団法人日本数学検定協会「第 303 回実用数学技能検定（算数検定）7 級」　2017 年
[5]公益財団法人日本数学検定協会「第 253 回実用数学技能検定（算数検定）7 級」　2014 年
[6]公益財団法人日本数学検定協会「第 244 回実用数学技能検定（算数検定）7 級」　2013 年

（資料１）第 262 回検定 2014.11.22　問題・解答類型・答案例

正答達成率　（25）41.9%　（26）40.4%

7　しゅんすけさんの町の小学生の人数は７５０人で，そのうち男子が３９０人，女子が３６０人です。このとき，次の問題に答えましょう。

(25)　この町の小学生の人数全体をもとにすると，男子の人数の割合は何％ですか。

(26)　この町の小学生の人数全体をもとにすると，５年生の人数の割合は１６％です。５年生の人数は何人ですか。この問題は，計算の途中の式と答えを書きましょう。

番号		解答類型	人数(人)	反応率	正誤
(26)	①	750×0.16＝120	84	29.1%	正答 36.0%
	②	7.5×16	13	4.5%	
	③	750×16÷100	2	0.7%	
	④	□÷750＝0.16	2	0.7%	
	⑤	2%が15人，15×8＝120	2	0.7%	
	⑥	その他正答	1	0.3%	
	⑦	750÷16	14	4.8%	誤答 56.7%
	⑧	750÷0.16	4	1.4%	
	⑨	750×16	2	0.7%	
	⑩	750－16	1	0.3%	
	⑪	その他誤答	67	23.2%	
	⑫	無解答	76	26.3%	
	⑬	部分点	21	7.3%	部分点 7.3%
		合計	289	100%	100%

正答①（基準量×割合で求めている（公式の活用)。）

(26)
16%＝0.16
750×0.16＝120
(答え)　120　人

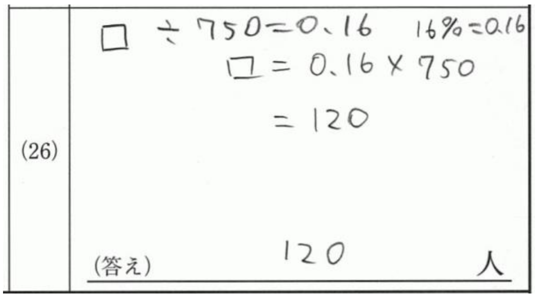
正答②（１％に当たる量を考えて、比較量を求めている。）

(26)
750÷100×16＝7.5×16
＝120
120
(答え)　人

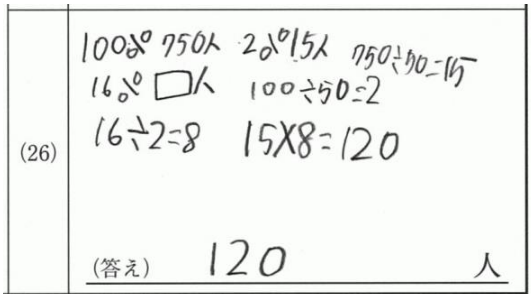
正答③（×0.16 を×16÷100 と捉えていると考えられる。）

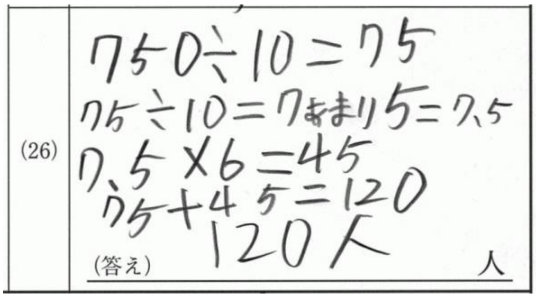
(26)
式　750×16÷100
＝12000÷100
＝120
(答え)　120人　人

正答④（比較量を□として、「比較量÷基準量＝割合」の公式を用いている（方程式の活用）。）

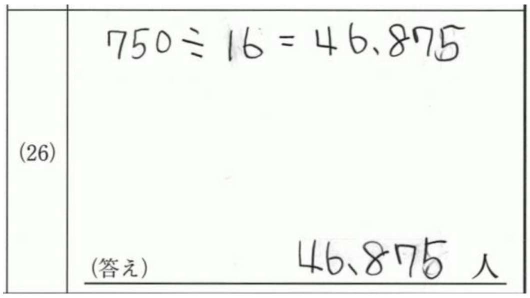


正答⑤（２％や 10%にあたる人数から解答を導いている。）

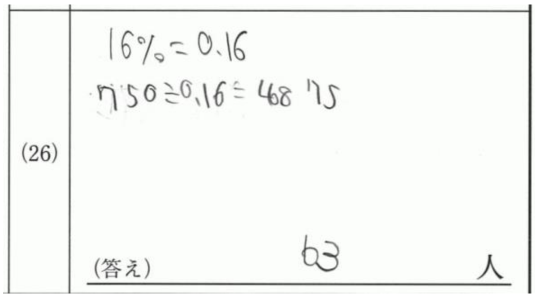




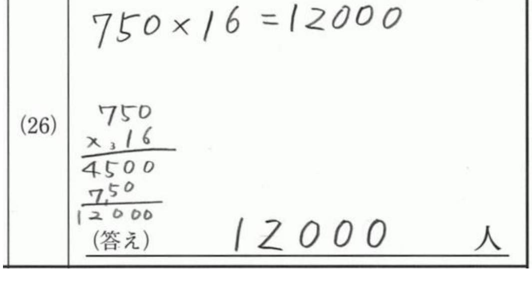
誤答⑦（百分率の値をそのまま用いて、除法を用いている。）



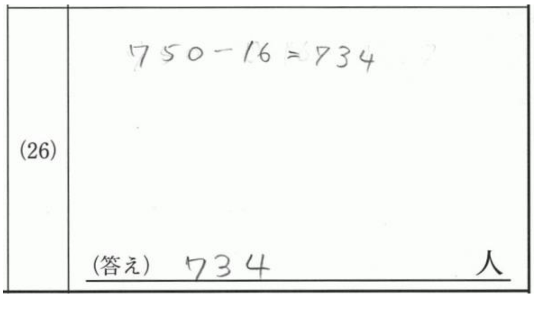
誤答⑧（百分率の値を小数になおして、除法を用いている。）



誤答⑨（百分率の値をそのまま用いて、公式にあてはめている。）

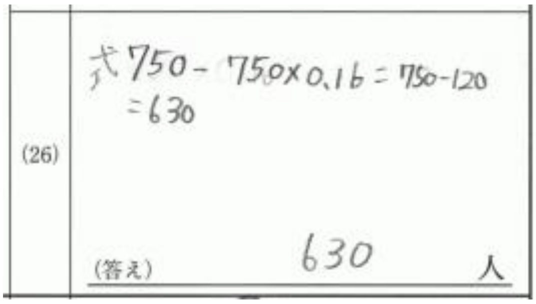


誤答⑩（百分率の値をそのまま用いて、減法を用いている。）

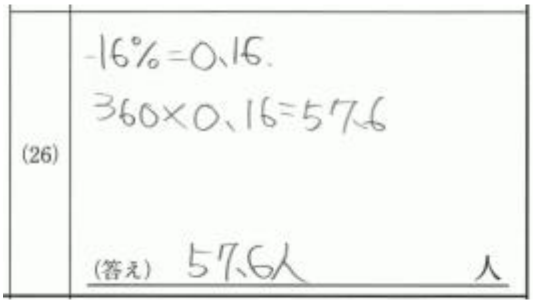


誤答⑪その他誤答

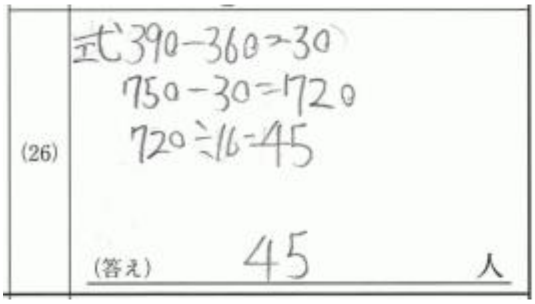
（５年生以外の人数を求めている。）

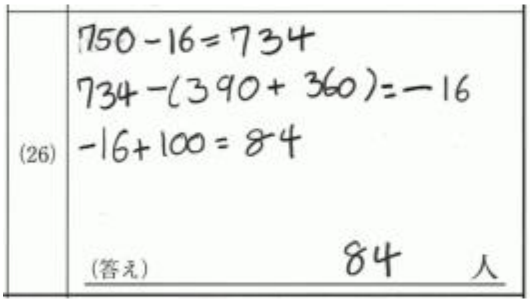


（女子の人数の１６％を求めている。）

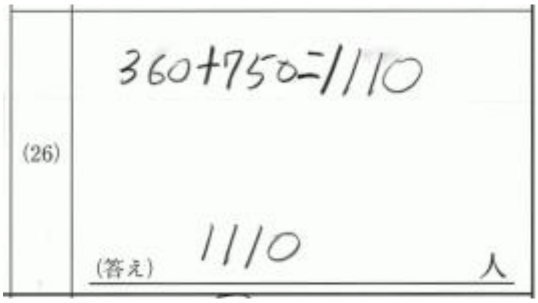


（不必要な値を含めて問題文中の数値をすべて用いている。）

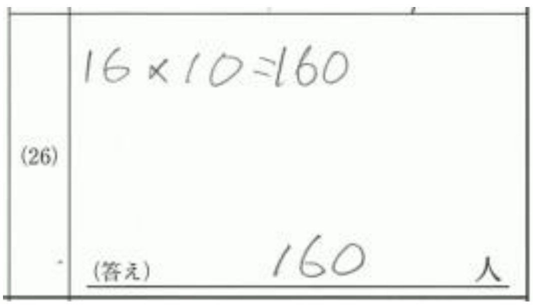




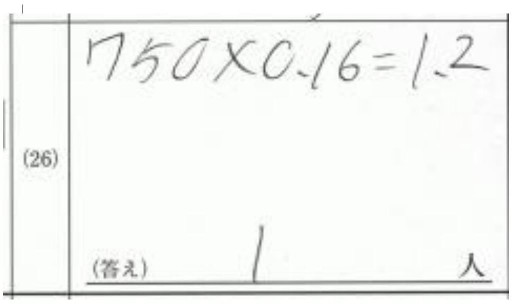
（人数のみに着目している。）

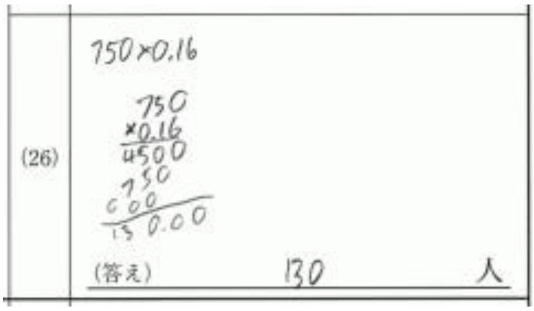


（百分率を１０倍した値を求める人数としている。）



部分点⑬（式は正しいが、計算を間違えている。）





（資料２）第 303 回検定 2017.06.24　問題・解答類型・答案例

正答達成率　（24）66.0%　（25）59.5%

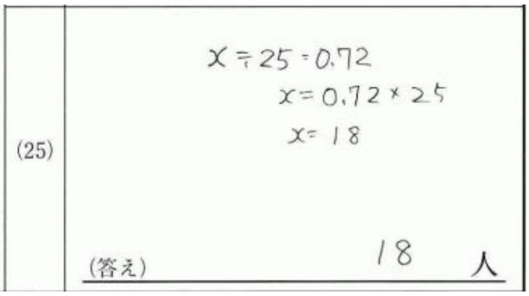
7　たかしさんのクラスで，２問の計算テストをしました。１問めは２０人が正解で，２問めはクラスの人数の７２％が正解でした。クラスの人数は２５人です。このとき，次の問題に答えましょう。

(24)　１問めが正解だった人の割合は，クラスの人数の何％ですか。

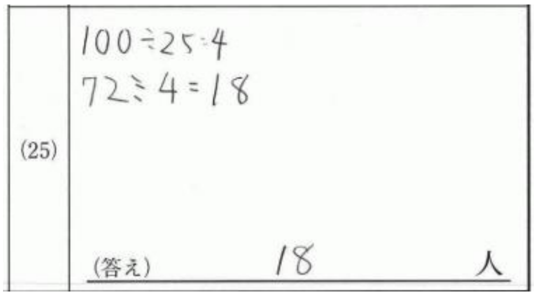
(25)　２問めが正解だった人は何人ですか。この問題は，計算の途中の式と答えを書きましょう。

番号		解答類型	人数（人）	反応率	正誤
（25）	①	25×0.72＝18	465	47.5%	正答 56.1%
	②	0.25×72	17	1.7%	
	③	25×72÷100	8	0.8%	
	④	□÷25＝0.72	13	1.3%	
	⑤	4%が1人、72÷4	29	3.0%	
	⑥	その他正答	17	1.7%	
	⑦	25÷72	3	0.3%	誤答 37.7%
	⑧	25÷0.72	8	0.8%	
	⑨	25×72	3	0.3%	
	⑩	72−25	2	0.2%	
	⑪	その他誤答	207	21.2%	
	⑫	無解答	146	14.9%	
	⑬	部分点	60	6.1%	部分点 6.1%
合計			978	100%	100%

正答④（比較量を x として、「比較量÷基準量＝割合」の公式を用いている（方程式の活用)。）

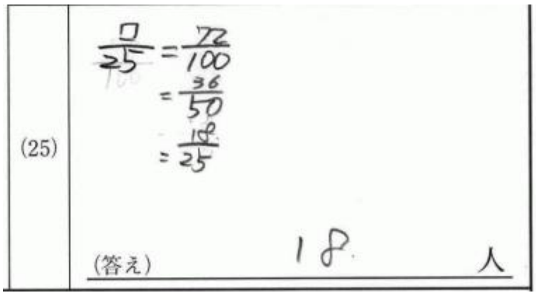


正答⑤（１人が４％に当たることを用いている。）



正答⑥その他正答

（割合を分数で表している（比の活用）。）


(25)

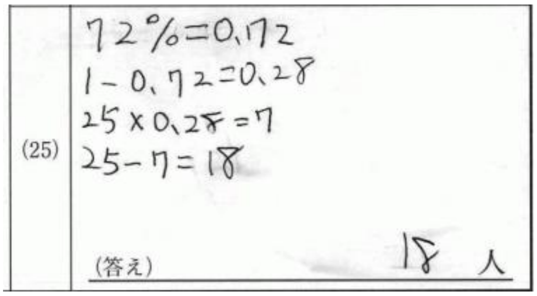
$\frac{□}{25}=\frac{72}{100}$

$=\frac{36}{50}$

$=\frac{18}{25}$

(答え) 18 人

（２問目が不正解だった人数から、正解者の人数を求めている。）


(25)

72%=0.72

1−0.72=0.28

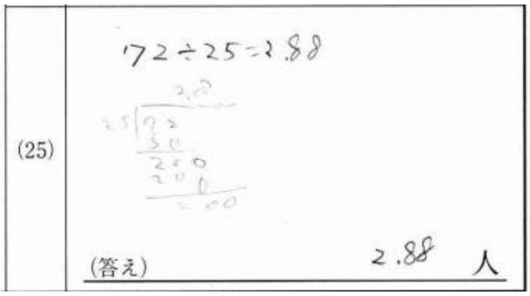
25×0.28=7

25−7=18

(答え) 18 人

誤答⑪その他誤答

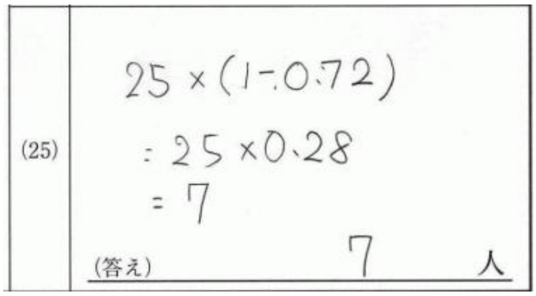
（⑦′ 72÷25 としたもの。31 人、3.2%）


(25)

72÷25=2.88

(答え) 2.88 人

（基準量×割合＝比較量の公式を用いているが、求める値や基準量が誤っている。）

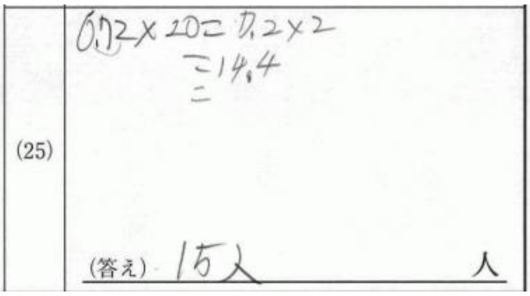

(25)

25×(1−0.72)

=25×0.28

=7

(答え) 7 人

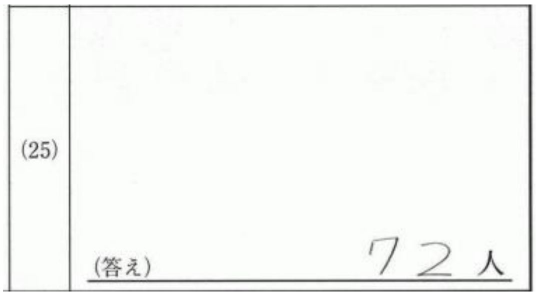

(25)

0.72×20=7.2×2

=14.4

(答え) 15人 人

（割合をそのまま求める人数としている。）


(25)

(答え) 72 人

（資料３）第 253 回検定 2014.7.12　問題・解答類型・答案例

正答達成率　<u>（25）55.8%</u>　（26）32.1%

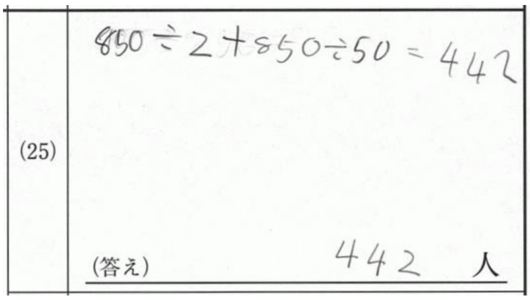
7　ひろしさんの学校全体の人数は，８５０人です。このうち，男子の割合は５２％です。このとき，次の問題に答えましょう。

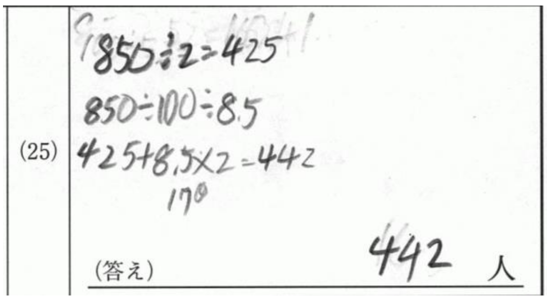
(25)　男子の人数は何人ですか。この問題は，計算の途中の式と答えを書きましょう。

(26)　ひろしさんのクラスの人数は，３４人です。ひろしさんのクラスの人数は，学校全体の人数の何％ですか。

番号		解答類型	人数（人）	反応率	正誤
(25)	①	850×0.52	379	43.2%	正答 49.9%
	②	8.5×52	37	4.2%	
	③	850×52÷100	5	0.6%	
	④	□÷850＝0.52	5	0.6%	
	⑤	850÷2+850÷50等	9	1.0%	
	⑥	その他正答	3	0.3%	
	⑦	850÷52	26	3.0%	誤答 39.4%
	⑧	850÷0.52	29	3.3%	
	⑨	850×52	6	0.7%	
	⑩	850－52	12	1.4%	
	⑪	その他誤答	148	16.9%	
	⑫	無解答	125	14.2%	
	⑬	部分点	94	10.7%	部分点 10.7%
		合計	878	100%	100%

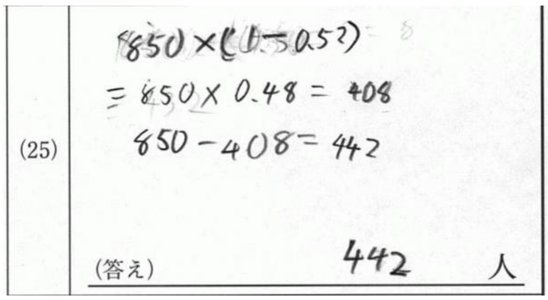
正答⑤（50%や２%にあたる人数を求めている。）



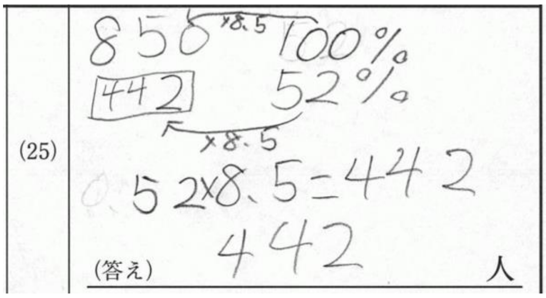


正答⑥その他正答

（女子の人数を求め、全体から引いている。）

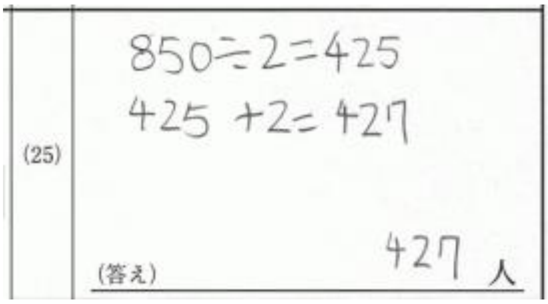


（比例の関係を用いている）

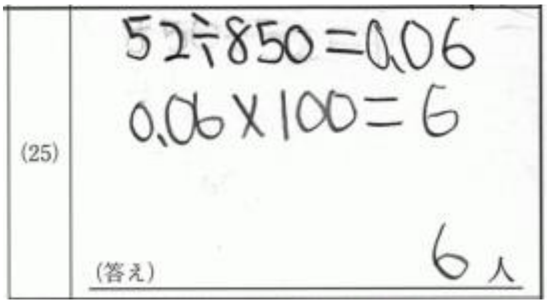

(25)
$850 \xrightarrow{\times 8.5} 100\%$
$\boxed{442}$　52%
×8.5
0.52×8.5=442
(答え)　442　人

誤答⑪その他誤答

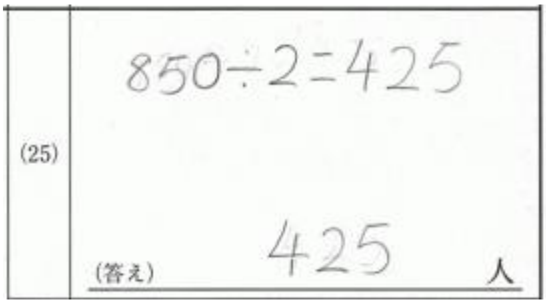
（50%にあたる人数は正しく求めているが、２%にあたる人数を２人としていると考えられる。）


(25)
850÷2=425
425 +2=427
(答え)　427　人

（割合を求める公式を誤用していると考えられる。）


(25)
52÷850=0.06
0.06×100=6
(答え)　6　人

（男女の人数を同数と捉えていると考えられる。）


(25)
850÷2=425
(答え)　425　人

（資料４）第 244 回検定 2013.11.15　問題・解答類型・答案例
正答達成率　（24）38.9%　（25）29.5%

7　まなみさんは洋服を買いに行きました。洋服店ではセールをしていたので，定価よりも安く買うことができました。このとき，次の問題に答えましょう。消費税はねだんにふくまれているので，考える必要はありません。

(24)　定価が２８００円のセーターを，２５％引きで買いました。買ったねだんは，定価よりも何円安くなりましたか。この問題は，計算の途中の式と答えを書きましょう。

(25)　定価が２５００円のスカートを，３０％引きで買いました。買ったねだんは何円ですか。

番号		解答類型	人数（人）	反応率	正誤
（24）	①	2800×0.25	33	19.9%	正答 32.5%
	②	28×25	4	2.4%	
	③	2800×25÷100	1	0.6%	
	④	□÷2800＝0.25	0	0.0%	
	⑤	2800÷5+2800÷20等	7	4.2%	
	⑥	その他正答	9	5.4%	
	⑦	2800÷25	28	16.9%	誤答 58.4%
	⑧	2800÷0.25	7	4.2%	
	⑨	2800×25	0	0.0%	
	⑩	2800－25	2	1.2%	
	⑪	その他誤答	39	23.5%	
	⑫	無解答	21	12.7%	
	⑬	部分点	15	9.0%	部分点 9.0%
		合計	166	100%	100%

正答⑤（25%は 100%の 1/4 であるとしている。）

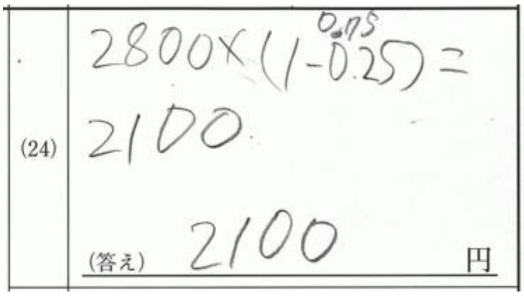
(24)	2800 ÷ (100÷25) (答え)　7 00　円

正答⑥（割引後の値段から、割引額を求めている。）

(24)	2800×(1−0.25)=2100 2800−2100=700 (答え)　700 円

誤答⑪その他誤答

（割引後の値段を求めている。）



(24)

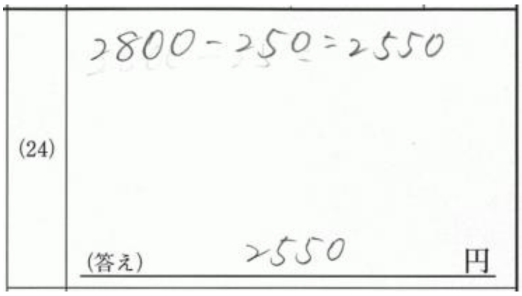
2800×(1−0.25)=

0.75

2100.

(答え) 2100 円

（百分率×10 を割引額とし､割引後の値段を求めていると考えられる。）



(24)

2800−250=2550

(答え) 2550 円

数学検定の７技能の重要性

学習数学研究所
渡辺　信

要約：数学学習においては知識を学び続けることと数学を考える過程での数学技能が重要である。数学が役立つことは個々の知識ではなく数学的技能の習得が必要であることを示す。この数学技能を重視する実用数学技能検定（数学検定）の７技能を示し、問題の中でいかに活用されているかを示す。生涯学習を行うためにも数学技能は重要であり、数学を考える過程で必ず活用されている技能に注目する。

キーワード：数学的技能　数学検定の示す７技能　数学の生涯学習

１．数学教育が目指すこと

生涯学習の観点から数学教育が目指すことをどのように捉えるかを問う。学校教育では重要な課題として数学知識の理解は欠かすことができない。数学知識を理解するために、その知識を活用する問題を解く訓練は必要不可欠である。数学知識を学ぶことは「数学暗記」へとつながる。公式を暗記することによって問題を解くことができることは多い。知識を暗記し、その問題の解法を暗記することによって数学が分かるようになる体験も多い。知識がなければ何も考えられないかもしれない。多くの教材研究がなされ、知識理解のために多くの努力がなされている。そして問題解決（Problem Solving）は数学教育の課題となっている。問題を解く訓練は数学教育の柱でもある。

生涯学習にとって数学教育は何を目指すのかが問われる。多くの知識は新しい知識を吸収するために必要である、そして問題を解くことは新しい知識を身に付けるためには必要不可決である。しかし、生涯学び続ける数学には知識だけではなく、数学が持つ数学的思考と数学技能を身に付ける必要がある。学校教育ではこの数学的思考と数学技能は、問題を解く過程で自然と身に付くことができると考えている。しかし、数学的思考方法は演繹的な訓練では身に付かない。もっと帰納的な思考を通して得ることができる。この帰納的な訓練を行う過程において常に必要なことが数学技能である。数学技能は数学の知識と共に必要不可欠である。数学教育が知識とともに技能を重視し、その技能を身に付けることによって、生涯学習の数学継続に役立つことを考える。

数学が役立つかの問題は学力テストのアンケートにもみられる。生徒に数学が役立つと思うかと問うときに、数学知識を問うのではない。以前に「2 次方程式の解の公式は役立つか」という論争があった。2 次方程式の解の公式は生活することには役立たないという考え方に、数学からのこの問題提起に関するコメントは聞かれなかった。個々の数学知識は役立

つことはめったに起こらないが、数学を学ぶ上で身に付くことが役に立つという思考・技能の観点は問題にしなかった。生涯学習において数学の学習を継続するために、数学技能は数学が役立つことを示唆する。数学が将来役立つことはこの数学技能が身に付いていることを指し示す。

２．数学教育の内容と構造

数学教育が考える内容について、知識理解のための教材研究は欠かすことができない。如何にしたら知識を理解し身に付けることができるかは、その後の数学内容にも大きな影響を与える。そして数学理解のための問題を解く訓練によって、数学が分かるようになる。問題を解くことによってその数学的思考が身に付き、そこで用いられている数学技能が訓練されている。

数学教育　→　問題解決　→　新しい問題へ発展

表 1．学校教育の流れ

未知の数学を作り出すことは不可能に近いと考え、すでに出来上がっている知識を与えることが重要な学習の始まりという考え方は強い。数学教育は与えられたことが中心であることは、数学学習をつまらなくする。与えられるという行為よりも、自らが主体的に考えることができることも重要な視点になる。現在の数学教育は指導者の下で与えられることを待つという学習になっている。そして与えられたことをどれだけ理解したかが試され評価される。このような学習に対して主体性を生かす数学学習が生涯学習へと通じる。この生涯学習からの観点に立って数学学習を見直したときに、自らが発見する数学を考えたい。

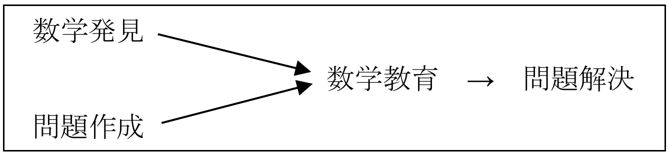


表 2．数学教育全体像

生涯学習で数学を楽しくすることは、与えられたことを学習するだけではなく、すでに学んだ数学の中で問題を作りだすことができることが重要である。この過程の中で必要なことは数学的思考であり数学技能である。すべての過程において数学技能は役に立つ。そしてこの技能を身に付けることが数学教育の重要な課題でもある。どのような数学知識においても、どのような問題を解くときにも、数学発見・問題作成から数学に至る過程において数学技能は重要な役割をする。このことから数学教育が数学技能の重要性を強調することもまた重要である。数学技能が数学を考える過程において常に使われることを積極的に評価する必要がある。

３．数学技能の重要性

数学教育現代化の学習指導要領の変更として、学習内容の削減が行われた。このときに数学教育の「基礎･基本」に戻ること（Back to Basic）が何を目指すべきか問われた。数学教育にとって数学技能の重要性が掲げられたのは、数学知識の重視によって今までには含まれていなかった集合･位相などが中心の数学教育によって、忘れられた数学技能の復権が叫ばれた。数学を学ぶためにはだれもが数学技能を身に付けておく必要性があると考えたのは当然の成り行きであった。数学的な考え方を身に付け、数学知識を学習することの困難なことを身を持って体験した後、数学教育にとって数学技能はだれもが身に付けておく必要があると考える。このような状況の中で実用数学技能検定が行われることに対して、社会から歓迎された。

数学の学力低下は数学技能の訓練不足が大きく影響している。数学技能を身に付けるための訓練が「ゆとり教育」によっておろそかにされていた。数学技能はその概念を知ると共に，使いこなせるための訓練が欠かせない。数学技能とは，反復訓練によって習得可能な能力として受け止められる。しかし訓練の時間を省いたゆとり教育は、数学技能を使えるという段階にまで訓練しなかった。この結果は数学学力低下を招くことは明らかであった。数学技能が使えるかどうかの判定は合格か不合格かが判定ができる。この意味でも実用数学技能検定は資格認定として機能した。

数学技能を身に付けることは数学を学び続ける生涯学習にも通じる。数学を楽しむための根底には数学技能が使えることは重要な要素である。数学技能は、数学の知識を問うことではない。数学を考える過程でいつでも使えることが要求されている。数学の特定の分野について語るのではなく、数学的に考え、問題解決のときにいつでも必要な最小限の技能と言ってもよい。このような数学技能を身に付けることは、数学を学び続けるときの手段になる。生涯にわたり数学を楽しむための技能の必要性から、数学検定が目指す生涯学習としての数学学習に必要な数学技能があり、その技能を身に付けることが数学を楽しむ生涯学習につながる。

４．数学技能の考え方

数学技能を重視する公務員試験は長い歴史を持つ。誰もが必要なこととして次の２分野を設けている。知識を問う問題は別に設定されているので、読解技能・数学技能を問う。公務員試験での易しい問題ととらえるのではなく、だれもが必要とする技能の確認である。現在、公務員試験でのこの技能の試験については、答えを求めることが重要視されている。しかし、このような問題設定があることは、公務員にとって何がもっとも必要かということを考えている。技能を教養として持っているかを問うことは、公務員試験が初めから重要視してきたことの一つであった。公務員試験がいくつかの段階に分かれていることとその最も身近な教養にあたる部分に教養としての技能があると考えられる。

分野	定義	
文章理解	言語能力の理解・解釈 数学でも文章問題が増える	日本語理解：現代文・古文・漢文 文章読解力：文章の内容把握・要旨把握 英文
数的処理	一般的な問題発見能力・処理能力をみる 「SPI」に近い	数理処理：鶴亀算など 判断推理：暗号・対応関係など 図形問題：展開図・回転の軌跡など 資料解釈：資料から読み取れる
(空間認識)		(現在欠けていると考えられる処理内容)

表 3．公務員試験教養の考え方（概略）

このような分類は一般知能としての位置づけがなされている。このような心理学的研究で 1938 年のサーストンの多因子知能説が有名である。多因子知能説にて掲げられたことは次の 7 つとして整理されている。（西内、P.219）

(1) 空間や立体を知覚する空間的知能
(2) 計算能力についての数的知能
(3) 言葉や文章の意味を理解する言語的知能
(4) 判断や反応の速さに繋がる知覚的知能
(5) 論理的推論を行う推理的知能
(6) 言葉を早く柔軟に使う流暢性知能
(7) 暗記力を示す暗記知能

このような伝統的視点に立った数学教育において数学知識理解とともに重要なこと、数学を考える、数学の問題を解くことすべての過程で必要になることは次のようになる。

数学思考の段階局面		数学的なプロセス
I	数学の発見 問題作成	(1)日常生活を観察して積極的に数学を探す (2)数学的な特徴を的確に捉えること (3)帰納的・具体的な思考 (4)情報を分類したり整理したりすること
II	問題解決 数学定理の証明方法の理解 Open End	(1)筋道を立てて考えること (2)理解している数学活用 (3)数学的な方針を立てることとその発展 (4)解釈したことを数学的に表現すること (5)数学的に処理すること (6)数学的に表現したことを解釈すること (7)解決結果を数学的に表現すること

III	問題解決から新しい数学への進展	(1)数学的な結果を事象に即して解釈すること (2)必要な情報を選択し判断すること (3)解決の過程や結果を批判的に考察すること (4)解決の過程や結果を振り返り評価・改善すること (5)統合的・発展的に考察すること (6)事象を多面的に見ること

表 4．数学思考で必要な過程

５．数学検定７技能の定義

実用数学技能検定は生涯学習の観点から、数学 7 技能を示してきた。この技能に対して数学教育があまり重要としないことを再度示したい。数学が役立つことの意味が明確になると考えられる。数学技能検定がただ数学の知識を競うだけではなく、生涯学習に役立つ数学技能を 7 つにまとめ、数学思考において必要なことを指摘してきた。公益財団法人日本数学検定協会が示す「数学検定の 7 技能」を示す。（資料として日本数学検定協会の 7 技能と数学の分野との関係を示す表を参照して欲しい。）

技能の名称	定義
計算技能	義務教育課程における四則演算に代表されるものであり，与えられた数体系の中で，定められたアルゴリズム（手順）に応じて，正しく解を導き出せる能力を意味する。
測定技能	長さ，面積，体積，角度といった量を実測または計算し，国際的な基準（単位など）を用いて，わかりやすく表現できる能力を意味する。
作図技能	図形に関する幅広い学習内容の中で，「作図」に特化した技能をさすものではなく，「作図」に代表されるもののことである。すなわちそれは，図形の性質を充分に理解した上で，その知識を活用できる能力を意味する。
統計技能	現象を調査することによって数量で把握できる能力，または，調査によって得られた数量データを活用できる能力を意味する。
整理技能	様々な情報の中から，有用なものや正しいものを適切に選択・判断し活用できる，高度な情報処理能力を意味する。
表現技能	文章や数式，図，表，グラフなどを用いて，自分の調査結果や意見，考えなどを正しく，わかりやすく相手に伝えることができる能力を意味する。
証明技能	相手に正しく，わかりやすく，自分がそのように考える理由を説明できたり，命題の真偽を示したりすることができる能力を意味する。

表 5．数学検定の 7 技能（日本数学検定協会から）

(1) 7技能と検定問題

この7技能は各検定問題の中に入っていることが好ましい。数学検定で確かめたいことは数学の新しい知識ではなく7つの技能が身についているかを試したい。ある数学技能には秀でていても数学の問題を考えるためにはすべての技能が要求される。どれか一つの技能が優れているよりも7つの技能が平均的に訓練されていることを数学検定の資格として測りたい。数学検定の問題の構成を7技能の配列を中心に見る。7つの技能ができるだけ使われるように問題を作成している。

数学検定2級は学校教育から見たときは高校2年生程度の数学的知識を前提にする。前提条件はあくまでも目安であり、知っていることは何でも使うことを可能としている。また2次検定では、「電卓使用可」であるがその電卓についての条件は付いていない。現在の受検生は高度の数学ソフトは使えない。途中で電卓に頼るよりは自分の力で計算をする。

また2級2次検定は「記述式」を重んじる。選択式・穴埋め方式はない。答えのみを要求する場合もあるが論述形式で答案作成を要求し、採点には時間をかけて一人一人の答案をよく見ることを心がけている。1次検定は計算問題が中心で答えだけを要求していることで、1次と2次を分けている。1次では電卓使用は認めていない。最近の傾向は1次は合格点が取れるが、2次では不合格という受験生が圧倒的である。将来逆転して2次は合格するが1次の計算問題が不合格ということが起こりうる。

問題	技能	問題分野	問題（一部掲載）
1選択	統計	分散 相関係数	2種類のテスト結果の平均・分散を求め、その2つの間の相関係数の計算をする。公式は要求する。
2選択		不定方程式	不定方程式 $5x-7y=3$ を解く。
3選択		円と接線	点(7，1)から $x^2+y^2=25$ への接線を求める。
4選択		数列と級数	$S_n=n(n+1)(n+2)$から数列 a_n 求め、$\Sigma 3/a_i$ の値を求める。
5選択	整理		（数学の分野の指定はできない。特有問題）
6必須		数え上げ	6枚のカードからの選択 カードに書かれた数の積からの事象の問題
7必須	測定	定積分 面積	2次関数と1次関数で囲まれた部分の面積を求める問題

2級2次の問題構成（全体で7問あり、2問は必須問題で残り5問から3問選択する。）

今回の問題では7技能のうち3技能（統計・整理・測定）が問題の個所に書かれていて残り4技能（計算・作図・表現・証明）の指定はなかった。今回は作図技能と証明技能の問題はなかった。

表6．問題と技能との関連

(2) 7 技能と検定問題例

７技能のいくつかを組み合わせて解く検定問題例もある。ほとんどの問題には計算技能が使われる。また 1 次の検定問題は計算技能の確認であり、2 次では計算技能だけという問題はない。このように問題を技能から分けると、数学の分野というよりも技能は数学的思考においては必ず使われている。技能を直接検討することはなかったが、数学は過程が重要であり、そこで用いられている技能を吟味することを忘れがちである。数学の結果だけ、数学分野の検討の優先されてはいないであろうか。問題と合わせて技能を検討したい。

計算＋統計＋表現技能の組み合わせとしての問題（７級問題８） ７級は小学校 5 年生程度の数学を前提とした問題である。６級から 11 級までは 1 次と 2 次の区別はない。簡単な記述式を含む検定問題が並ぶ。この 1 次と 2 次の区別がないために、1 つの問題がいろいろな技能を含むことがある。 問題　生徒のアンケート調査のデータ処理の問題で統計技能を用いる。そしてこのデータが項目ごとの生徒数で表されているとき、データのパーセントを計算して円グラフを用いて表現する。この円グラフを書いてデータの処理は表現技能である。

表 7．問題の中に現れる複数の技能（1）

技能の組み合わせは多くの問題で見られる。一つの問題に一つの技能が対応するのではなく、一つの問題にいくつかの技能が組み合わされている問題で２次問題の例を 2 つ挙げる。問題で何が問われるかの結果ではなく、数学を考える過程において活用される技能は何かに注目したい。数学は知識内容に力点が置かれるが、問題の過程を注目したときにそこに使われている技能を取り出した。

計算+作図+表現技能の組み合わせとしての問題（３級 2 次問題） 問題　直方体の縦、横、高さが与えられたときに体積を求める問題は測定技能であり、対角線の長さを求める問題は直角三角形を探して書くことから作図技能となる。計算技能は三平方の定理を使うときに必要である。

表 8．問題の中に現れる複数の技能（2）

このような技能を明確にした問題についての例を挙げる。数学を考えるということは、はじめから演繹的な思考方法は不可能である。どの定理を理解するための問題であるかが分かっているときは、帰納的・具体的な法は取らず演繹的思考が強力な武器になる。数学が演繹的であると考えているが、どのような考え方に至るかは帰納的な思考方法で方針を探すことも重要である。このようなときには多くの技能が使われる。ただ 1 つだけの技能

が使われるだけではなく多くの技能を必要とする問題を考えることは、数学の問題を解く楽しさを体験できる。

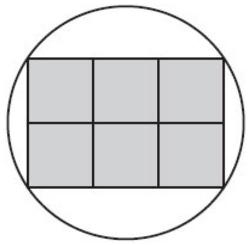
計算＋作図＋測定＋整理＋表現＋証明技能の組み合わせとしての問題（準１級２次・特有問題）

特有問題は数学の分野によらず、数学的思考力を試したい。問題の要約ではなく問題をそのまま載せる。このような問題を選択する受検生が増えていることも新しい傾向である。

問題

きまった数の単位正方形（１辺の長さが１の正方形）を，できるだけ小さい円につめこむ方法について考えます。ただし，正方形どうしを重ねてはいけません。これについて，次の問いに答えなさい。（整理技能）

（１） 右の図は，６個の単位正方形のつめこみ方の一例です。配置を工夫すると，６個の単位正方形をこの円$\left(\text{半径 } \dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$より小さい円につめこむことができます。そのようなつめこみ方の例を１つ挙げて図示し，そのときの円の半径も求めなさい。



（２） 右の図の円に，７個の単位正方形をつめこむことはできますか。理由をつけて答えなさい。

表 9. 問題の中に現れる複数の技能（3）

６． Technology と数学技能の変化

すべての人に必要な技能は Technology に置き換わる可能性がある。GIGA スクール構想ではすべての児童・生徒は情報機器を活用する時代を目指している。情報機器を活用できることから最も変化が著しいことは技能が機械によって簡単・正確にできることである。現在の学校教育が情報機器活用に積極的ではないことは、技能訓練を重視していることの表れと理解することもできる。しかし技術の進歩は生活そのものを変える。数学教育においては情報機器活用は最も遅れてしまった。この結果、数学は与えられることが中心の教育として今まで通りの教育を守っている。

数学において技能を身に付けることは重要な課題であり、生涯学習において数学を学ぶことは技能が身に付いていないと不可能である。しかし、この技能の訓練の必要性はなくなる。例えば計算技能は電卓による四則演算は速く正確に行うことができる。そして文字計算を可能にした CAS 機能は因数分解・微分積分を計算する。計算問題だけという数学の問題はなくなった。どのような計算がしたいのか、計算結果を使って何を考えたいのかが問われる。Technology は数学の問題を変え、技能のみの数学問題は数学ではなくなった。数学の問

題にも大きな変化が表れている。常に使う技能は Technology によって結果を出すが、数学としてやりたいことがより広がっている。現在の技能については Technology をいかに上手に用いるかにかかっている。

引用文献・参考文献

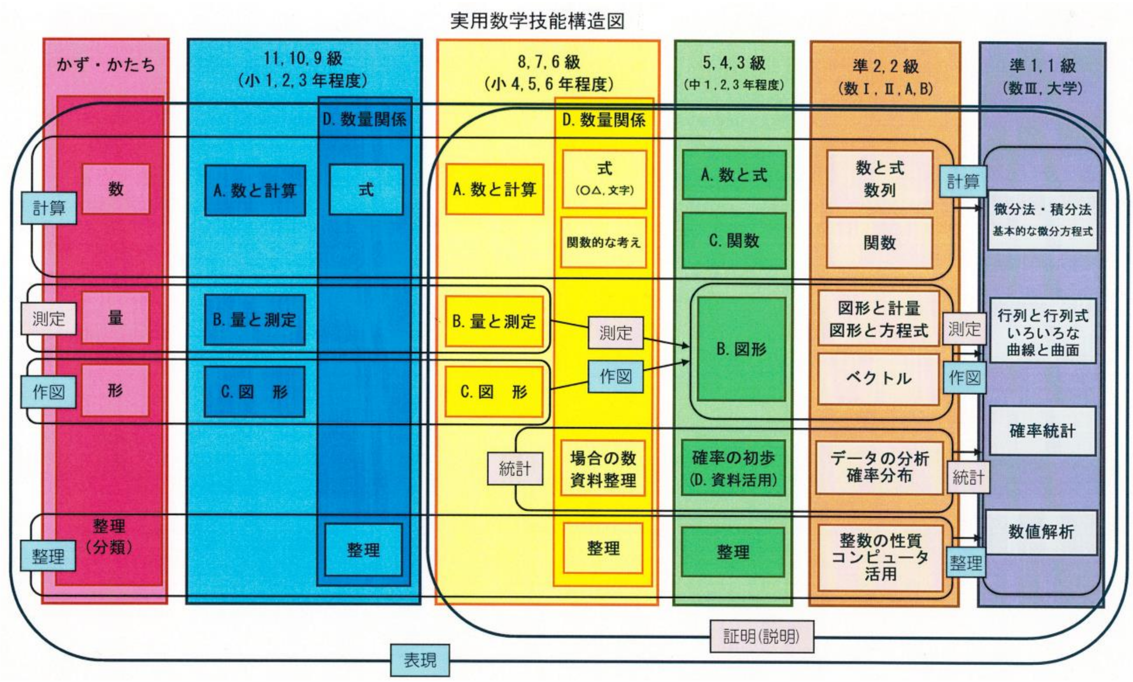
(1) 西内啓、統計学が最強の学問である、ダイヤモンド社、2013

(2) 松本精一、実用数学技能検定（算数検定）と技能－7 技能の構造について－、日本数学教育学会大会発表要旨集（幼稚園・小学校部会）、P.36、2014

(3) 松本精一、実用数学技能検定（数学検定）と技能－7 技能の構造について－、日本数学教育学会大会発表要旨集（中学校部会）、P.215、2014

(4) 日本数学検定協会、7 技能について、2014

資料　実用数学検定における 7 技能と数学分野との関係(日本数学検定協会提供)



【研究ノート】

三角比の基本定理群は同値である

学習数学研究所　特別顧問

一松　信(*)

要旨

三角形に関する三角比を使った３種の基本定理群：正弦定理，第一余弦定理，第二余弦定理は，それぞれから他が直接に導かれるという意味で互いに同値であることを注意する。併せて若干の「副産物」として，いくつかの公式を導く。

１．扱う問題

三角形ＡＢＣの３個の内角を A，B，C としそれらに対応する辺長をそれぞれ a，b，c で表す。これらの間に，次の諸関係があることはよく知られている。

<u>正弦定理</u>　$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\left(=\frac{1}{2R}\right) \tag{1}$$

ただし本稿では(1)の比の値は問題にしない。

<u>第一余弦定理</u>　$$\begin{cases} b\cos C+c\cos B=a \\ c\cos A+a\cos C=b \\ a\cos B+b\cos A=c \end{cases} \tag{2}$$

<u>第二余弦定理</u>　$$\begin{cases} -a^2+b^2+c^2=2\,bc\cos A \\ a^2-b^2+c^2=2\,ca\cos B \\ a^2+b^2-c^2=2\,ab\cos C \end{cases} \tag{3}$$

これらはそれぞれを直接に幾何学的な方法で証明できるが，その内の一群から他を導出することもできる。その意味で，三個の定理群は互いに同値といってよい。以下その相互関連を示す。三角関数の加法定理などは既知とする。

その証明は現行の高等学校数学の範囲で可能だが，以下では若干逸脱して意義を明確に示した。もっともそれらはすべて「実用数学技能検定」１級の範囲内である。またその「副産物」として，いくつかの有名な公式が導出できることも注意した。

２．第一余弦定理 ⟷ 第二余弦定理

これはもっとも簡単である。(2)を，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ を未知数とする３元連立一次方程式とみなして解けば(3)を得る。逆は代入して計算すればよい。

(2)を「解く」のは消去法でも可能だが，クラーメルの公式を適用すれば，直ちに

$$\cos A=\frac{a^3-ab^2-ac^2}{-2\,abc}=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,bc} \tag{3'}$$

を得る。$\cos B$，$\cos C$ も同様である。

逆に(3′)の形を(2)の第１式に代入すれば

(*)SIN HITOTUMATU，京都大学名誉教授，公益財団法人 日本数学検定協会名誉会長

$$b\cos C+c\cos B=\frac{1}{2a}\left[a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2\right]=\frac{2a^2}{2a}=a$$

となる。他の b, c も同様である。

３．正弦定理 ⟷ 第一余弦定理

これは加法定理の応用である。次の公式に注意する。

<u>補助定理１</u>　$A+B+C=2$ 直角のとき

$$\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A=\sin(A+B)=\sin C \tag{4}$$

が成立する。

正弦定理を仮定すれば，(4)から(2)の一つの式

$$a\cos B+b\cos A=c$$

が直ちに導かれる。他も同様である。

逆に(2)を仮定する。これを a, b, c を未知数とする３元連立一次方程式とみなす。その点を明確にするために，線形代数学の基本的な結果を利用して次のようにおく。

$$\text{行列 } M=\begin{bmatrix}-1 & \cos C & \cos B\\ \cos C & -1 & \cos A\\ \cos B & \cos A & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\sin A\\ \sin B\\ \sin C\end{bmatrix} \tag{5}$$

等式(4)から $M\cdot\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$（零ベクトル）である。しかし $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ だから，M の行列式は０である。それを展開すれば，次の公式が副産物として得られる。

<u>定理２</u>　$A+B+C=2$ 直角のとき

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1 \tag{6}$$

もちろん定理２は直接にも証明できる（後述)。

さて行列 M の行列式は０だが，その２次の首座行列式の値は $1-\cos^2 C=\sin^2 C$，他も $\sin^2 B$，$\sin^2 A$ であり，すべて正である。したがって M は階数２であり，０はその単純固有値で，他の固有値は正である。M は二次形式としては準正値であり，M の核は１次元であって $\boldsymbol{v}$ の定数倍で表される。

ところで(2)が成立すれば，それは $M\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ を意味する。ゆえに $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ の定数倍であるが，それは正弦定理に他ならない。

なお M が準正値であることから次の結果を得る。

<u>定理３</u>　x, y, z が実数のとき，次の不等式が成立する。

$$x^2+y^2+z^2\geqq 2(xy\cos C+xz\cos B+yz\cos A) \tag{7}$$

等号は $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ のとき（$x=y=z=0$ も含む）に限る。

よく知られた次の不等式は(7)の特別な場合である：

$$x^2+y^2+z^2\geqq xy+xz+yz \text{ ；等号は } x=y=z \text{ のとき} \tag{7´}$$

もちろん(7)は，平方完成，すなわち左辺－右辺を２乗の項の和に変形する方法によって

直接に証明することもできる。

４．正弦定理 $\longleftrightarrow$ 第二余弦定理

これは最も厄介である。もちろん前二節の結果から，第一余弦定理を仲介にして証明できるが，以下では直接の証明を試る。

正弦定理→第二余弦定理　を示すには，比例関係によって a，b，c をそれぞれ $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ に置き換えた次の式(8)（およびそれを巡回的に動かした式）を，$A+B+C=$２直角の仮定の下に示せばよい：

$$-\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin B\sin C\cos A \tag{8}$$

ここで補助定理１（式(4)）から次の等式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 A&=\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C\\ \sin^2 B&=\cos A\sin B\sin C+\sin A\sin B\cos C\\ \sin^2 C&=\sin A\cos B\sin C+\cos A\sin B\sin C\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここで(9)の下の２式の和から第一式を引けば(8)を得る。他も同様である。

なお(9)の３式を加えると

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C) \tag{10}$$

を得る。$\cos(A+B+C)$を展開して比較すると

(10)の右辺$=2[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)]=2+2\cos A\cos B\cos C$

である。(10)の左辺を$3-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$として整理すれば，定理２（式(6)）を得る（定理２の一つの別証）。

ただし定理２を直接に証明するのならば，次のように考えた方が早いと思う。

$$\cos^2 A=-\cos A\cdot\cos(B+C)=\cos A\sin B\sin C-\cos A\cos B\cos C$$

同様に$\cos^2 B$，$\cos^2 C$を表して加えると，次のようになる。

$$\begin{aligned}&\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C\\ &=\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C-\cos A\cos B\cos C\\ &=\sin(A+B)\cdot\sin C-\cos(A+B)\cdot\cos C=-\cos(A+B+C)=1\end{aligned}$$

定理２の等式(6)は有用である。しかしその応用例を論ずるのは本稿の主題から外れるので，これ以上言及しない。

第二余弦定理→正弦定理　(3)から$\cos A$を a，b，c で表すと以下の等式を得る。

$$1+\cos A=\frac{1}{2bc}(2bc+b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2bc}(a+b+c)(-a+b+c)$$

$$1-\cos A=\frac{1}{2bc}(2bc-b^2-c^2+a^2)=\frac{1}{2bc}(a-b+c)(a+b-c)$$

この両者を掛ければ

$$\sin^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \tag{11}$$

を得る。したがって $\dfrac{\sin^2 A}{a^2}$ は(11)の右辺の分母を $4a^2b^2c^2$ とした式に等しい。その式は a, b, c について対称なので

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2} \tag{12}$$

である。$\sin A$, a などはすべて正なので，(12)の平方根をとれば正弦定理を得る。

ところで三角形の面積を S とすれば

$$2S=bc\sin A$$

である。これに等式(11)を適用すると次の結果を得る：

<u>定理４</u>　$(4S)^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$$=-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \tag{13}$$

定理４は，３辺長 a, b, c から三角形の面積を求める<u>ヘロンの公式</u>と同一である。この導出は，引用文献の第一証明である。この方法を御注意下さった（文献の前身の雑誌記事に対する）応募者に謝意を表明する。

５．むすび

以上第１節の定理群(1)，(2)，(3)が互いに同値であることを示すとともに，いくつかの「副産物」を注意した。第一余弦定理は現在の教科書ではほとんど「忘れられて」いるようだが，(2)を（a, b, c）あるいは（$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$）に関する３元連立一次方程式とみなすと有用なことがあるという観点に注目した次第である。

参考文献

一松信「続・創作数学演義」現代数学社，2019 年，第２部補充③ヘロンの公式の別証明

エルデーシュの不等式とその応用

学習数学研究所　特別顧問
一松　信(*)

０．目的

平面三角形に関するエルデーシュの不等式（定理１）とそれから派生するいくつかの不等式を論ずる。前者の証明は文献[1]とほぼ同様だが，その後半の議論を線形代数学の面から見直して扱う。応用例については，直接に容易に証明できるものもあるが，直接の証明が意外と困難と思われるものも含まれる。

１．エルデーシュの不等式とその証明

定理１．（エルデーシュの不等式）平面三角形ＡＢＣの内部に１点Ｐをとり，Ｐから辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢに垂線ＰＤ，ＰＥ，ＰＦを引く。このとき次の不等式が成立する（図１）。

$$2(\mathrm{PD}+\mathrm{PE}+\mathrm{PF}) \leqq \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} \tag{1}$$

(1)で等号が成立するのは△ＡＢＣが正三角形で，Ｐがその中心であるときに限る。

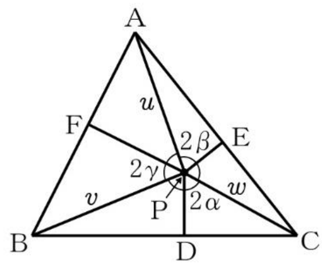


図1

証明はいろいろ可能だが，以下では文献[1]の線に沿い，三角法を使って２段階に分けて示す。

１．１　第１段の不等式

以下，便宜上　u＝ＡＰ，v＝ＢＰ，w＝ＣＰ，∠ＢＰＣ＝２α，∠ＣＰＡ＝２β，∠ＡＰＢ＝２γ（α＋β＋γ＝２直角）とおく。

補助定理２．このとき次の不等式が成立する。

$$\mathrm{PD} \leqq \sqrt{vw}\cdot\cos\alpha \tag{2}$$

ＰＥ，ＰＦも同様である。(2)で等号は $v=w$ に限る。

系３．$\mathrm{PD}+\mathrm{PE}+\mathrm{PF} \leqq \sqrt{vw}\cos\alpha+\sqrt{wu}\cos\beta+\sqrt{uv}\cos\gamma$　(3)

等号は $u=v=w$，すなわち△ＡＢＣが鋭角三角形で，点Ｐがその外心のときに限る。

補助定理２の証明　面積の関係から

$$a\cdot\mathrm{PD} = 2\triangle\mathrm{BPC} = vw\sin 2\alpha = 2\,vw\sin\alpha\cos\alpha \tag{4}$$

である。余弦定理による　$a^2=v^2+w^2-2\,vw\cos 2\alpha$　を下から評価するために，$v^2+w^2 \geqq 2\,vw$ とすると

$$a^2 \geqq 2\,vw(1-\cos 2\alpha) = 4\,vw\sin^2\alpha$$

したがって　$a \geqq 2\sqrt{vw}\sin\alpha$　であり，(4)と併せて(2)を得る。ＰＥ，ＰＦについても同様で

(*)SIN HITOTUMATU，京都大学名誉教授，公益財団法人 日本数学検定協会名誉会長

あり，それらを加えれば(3)を得る。(3)で等号は $u=v=w$ に限る。

1．2　第２段の不等式

以上の結果から定理１を示すには，不等式

$$2\times(3)\text{の右辺}\leqq u+v+w \tag{5}$$

を示せばよい。これは次の結果に含まれる。$\sqrt{u}=x$，$\sqrt{v}=y$，$\sqrt{w}=z$ と置き換える。

補助定理４．$\alpha+\beta+\gamma=2$直角のとき，実数 x，y，z について

$$x^2+y^2+z^2-2xy\cos\gamma-2zx\cos\beta-2yz\cos\alpha\geqq 0 \tag{6}$$

である。等号は $x:y:z=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$ のときに限る。

系５．$\alpha=\beta=\gamma$（$=60^\circ$）のときは，(6)は次のよく知られた不等式になる。

$$x^2+y^2+z^2-xy-zx-yz\geqq 0 \tag{6´}$$

補助定理４の証明　直接に(6)の左辺を２乗の和の形に変形することも可能だが，以下では線形代数（二次形式）の理論を活用する。(6)は次の二次形式である。

$$M=\begin{bmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \text{とおくと}\ (6)=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{7}$$

ここで（$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin\gamma$）を成分とする縦ベクトルを $\boldsymbol{v}$（$\boldsymbol{o}$ ではない）とおくと，加法定理から $M\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ である。―例えば第１行は，$\beta+\gamma$ の補角が α なので

$$\sin\alpha-\sin\beta\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta=\sin\alpha-\sin(\beta+\gamma)=0$$

となる。第２行，第３行も同様である。

したがって M の行列式＝０である。しかし M の２次首座小行列式は $1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma$ などすべて正なので，M の階数は２である。これから M の固有値は１個が０，他の２個が正であり，二次形式(6)＝(7)は準正値である。すなわちその値は，ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ が $\boldsymbol{v}$ と比例するとき（$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ も含む）のみ０，他は正である。

系６．$\det M=0$ を具体的に計算すると，等式

$$\alpha+\beta+\gamma=2\text{直角のとき}\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1 \tag{8}$$

を得る。

(8)は周知の等式で，直接にも証明できる。

以上をまとめれば定理１を得る。等号は第１段で $u=v=w$（$x=y=z$），第２段で $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma$ のときに限る。そのとき△ＰＢＣ，△ＰＣＡ，△ＰＡＢは互いに合同になり，△ＡＢＣは正三角形，点Ｐはその中心である。

２．エルデーシュの不等式の応用

2．1　Ｐが外心のとき

このときは $2\alpha=2A$，すなわち $\alpha=A$，$\beta=B$，$\gamma=C$ である。外接円の半径を R とする

と，(1)は

$$2(R\cos A+R\cos B+R\cos C)\leqq 3R \quad \Rightarrow$$

$$A+B+C=2\text{直角のとき}\quad \cos A+\cos B+\cos C\leqq 3/2 \tag{9}$$

となる。但し(9)は直接に加法定理を活用して証明できる。(9)で等号は $A=B=C=60°$ のときに限る。

２．２　Ｐが垂心Ｈのとき（図２参照）

$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{HD}=2R\sin B\sin C-2R\cos A$

から，$\cos A=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$ により，

$$2(\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B)\leqq\cos A+\cos B+\cos C \tag{10}$$

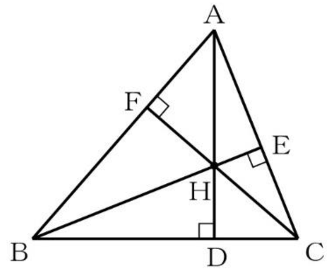


図2

を得る。(10)で等号は $A=B=C=60°$ に限る。

不等式(9)と併せれば，$A+B+C=2$直角のとき，不等式

$$\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B\leqq 3／4 \tag{10´}$$

が成立する。もっとも(10´)は直接にも証明できる。（例えば[２]）

ただし，不等式(10)に対する上述の証明は，鋭角三角形に限る。もっともつねに(10)の右辺＞１であり，直角および鈍角三角形では(10)の左辺≦１（等号は直角二等辺三角形に限る）が示されるので，(10)は正しい。もっとも（10）は余弦定理によって，辺長 a, b, c の間の不等式として直接にも証明できる.

これらの結果は当面の話題からは外れるので，改めて次節で論ずる。

２．３　Ｐが内心Ｉのとき（図３参照）

辺長を $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とし，内接円の半径を r，三角形の面積を S とする。不等式(1)から

$$6r\leqq \mathrm{AI}+\mathrm{BI}+\mathrm{CI}$$

である。これ自体を整理すれば，既知の不等式を若干改良したものになる。しかし，さらに３個の傍心を$\mathrm{E_A}$，$\mathrm{E_B}$，$\mathrm{E_C}$とすると，内心Ｉは$\triangle\mathrm{E_AE_BE_C}$の垂心なので，再び(1)を適用して

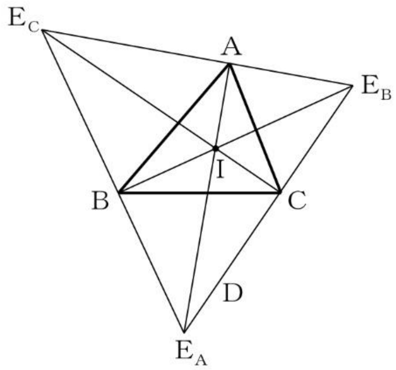


図3

$$12r\leqq 2(\mathrm{AI}+\mathrm{BI}+\mathrm{CI})$$
$$\leqq \mathrm{E_AI}+\mathrm{E_BI}+\mathrm{E_CI} \tag{11}$$

を得る。次の具体的値を代入すると

$$\mathrm{E_AI}=\mathrm{AE_A}-\mathrm{AI}=\sqrt{\frac{bc(a+b+c)}{-a+b+c}}-\sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}$$

$$=\frac{\sqrt{bc}\,[(a+b+c)-(-a+b+c)]}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}=\frac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}$$

などから，次の不等式を得る：

$$\frac{24S}{a+b+c}=\frac{6\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{\sqrt{a+b+c}} \qquad \text{(ヘロンの公式)}$$

$$\leqq \frac{2\sqrt{abc}}{\sqrt{a+b+c}}\left[\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\right]$$

さらに両辺を２で割って分母を払うと

$$3(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$\leqq \sqrt{a\left[a^2-(b-c)^2\right]}+\sqrt{b\left[b^2-(c-a)^2\right]}+\sqrt{c\left[c^2-(a-b)^2\right]} \qquad (11')$$

を得る。余弦定理により

$$a^2-(b-c)^2=2bc-(-a^2+b^2+c^2)=2bc-2bc\cos A=2bc(1-\cos A)=4bc\sin^2(A/2)$$

と変形すると，(11´)の右辺は

$$2\sqrt{abc}\left[\sin(A/2)+\sin(B/2)+\sin(C/2)\right]$$

となり，全体として次の不等式を得る。

定理７．△ＡＢＣについて上述の記号を使うと

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\leqq\frac{2}{3}\left[\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right]abc \qquad (12)$$

が成立する。(12)で等号は $a=b=c$（$A=B=C$）に限る。

注意　正の数 a, b, c に対して，次の不等式はよく知られており，いろいろの証明がある。

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\leqq abc \qquad (13)$$

(13)はその左辺≦０なら自明だが，左辺が正で a, b, c が三角形の３辺をなす場合に限ると，不等式(12)の右辺の［　］の値≦３/２が示される。したがって（12）は(13)の（若干の）改良になっている。

なお三角形内の点Ｐの調和共役点Q_A，Q_B，Q_Cの作る三角形に対し，Ｐがその垂心になるのは，点Ｐがもとの三角形の内心のときに限る。

３．不等式（10）の証明

３.１　直角・鈍角三角形について

$A=\theta+\phi$，$B=\theta-\phi$，$C=\pi-2\theta>\pi/2$ とおく。$0<\phi\leqq\theta\leqq\pi/4$ に注意する。加法定理などにより

$$\cos A+\cos B=\cos(\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)=2\cos\theta\cos\phi$$

$$\cos A\cdot\cos B=\cos^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi=\cos^2\theta\cos^2\phi-(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\phi)$$

$$=-1+\cos^2\phi+\cos^2\theta=\cos^2\phi-\sin^2\theta$$

である。(10)の（　）内（左辺の半分）は次のようになる。

$$\cos^2\phi-\sin^2\theta-2\cos\theta\cos\phi\cos2\theta$$

$$=(\cos\phi-\cos\theta\cos2\theta)^2-\sin^2\theta-\cos^2\theta\cos^2 2\theta \qquad (14)$$

しかし $\cos\phi \geqq \cos\theta > \cos\theta\cos 2\theta$ なので，（14）の第１項は０になれない。したがって(14)の最大は $1/\sqrt{2} \leqq \cos\phi < 1$ の２次式 t の端点 $\phi=0$ か $\phi=\theta$ かで生じる。$\phi=\theta$ ならば

$$(14)=\cos 2\theta(1-2\cos^2\theta)<0<1/2$$

である。$\phi=0$ ならば $t=\cos^2\theta$ （$1/2 \leqq t \leqq 1$）とおくと

$$(14)=\cos^2\theta-2\cos^2\theta\cos 2\theta=t\left[1-2(2t-1)\right]=-4t^2+3t$$

である。これは所要の区間の端点 $t=1/2$（$\theta=\pi/4$）で最大値 $1/2$ をとる。それは $\theta=\pi/4$，$\phi=0$ であり，直角二等辺三角形に限る。それ以外の直角三角形および鈍角三角形のときには，つねに（14）$<1/2$ である。

３．２　不等式(10)の直接証明

余弦定理によれば，不等式(14)は次の形になる。

$$2\left[\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{4a^2bc}+\frac{b^4-(c^2-a^2)^2}{4ab^2c}+\frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{4abc^2}\right]$$

$$\leqq\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}+\frac{a^2-b^2+c^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \tag{14´}$$

整理すると（$2abc$ を掛ける）次のようになる。

$$a^3+b^3+c^3-\left[(b^2-c^2)^2/a+(c^2-a^2)^2/b+(a^2-b^2)^2/c\right]$$

$$\leqq-(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \tag{15}$$

あるいは（移項してまとめて）

$$(b^2-c^2)^2/a+(c^2-a^2)^2/b+(a^2-b^2)^2/c$$

$$-\left[2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\right]\geqq 0 \tag{15´}$$

になる。(15´)の後の［　］内は

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$$

などの和になる。$(b^2-c^2)^2=(b-c)^2(b+c)^2$ などに注意して，(15´)は

$$(b-c)^2(b+c)\left(\frac{b+c}{a}-1\right)+(c-a)^2(c+a)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)+(a-b)^2(a+b)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)$$

となる。$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$ からこれは $\geqq 0$ である。等号は $a=b=c$ に限る。

この証明は三角形の形状に依存しない。

４．むすび

以上，エルデーシュの不等式(1)の証明と，その若干の応用を述べた。これらは一例にすぎないが，不等式(10)や(12)は直接の証明が必ずしも容易ではないようなので，興味がある。他の点Ｐから，さらに色々な不等式が得られることを期待する。

参考文献

[1]一松　信,三角形に関する不等式二例,日本数学教育学会,高専大学部会論文誌15(2008)
no1.p65-70

[2]一松　信,創作数学演義,現代数学社,2017;特に第13話,三角形に関する極値問題(1)

$x^m + x^n + 1$の因数分解と Technology

学習数学研究所

渡辺信

忘れられない思い出の一つに $x^{10}+x^5+1$ の因数分解ができたときのことである.

$x^{15}-1=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)$ 　　:$x^3=X$ とおく

$=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$ 　:$x^5=X$

因数の一意性定理によって$(x^{10}+x^5+1)$は(x^2+x+1)を因数として持つ.

$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

簡単にできる因数分解を組み合わせ，割り算をすることで因数分解ができることを見つけた.

この問題に対して，コロモゴロフは彼の活躍した 100 年前の数学の思考方法の大切さを次のように述べている.

> 複雑な文字式を巧みに変形する意味での代数的計算を行う能力，・・・まじめに数学研究に取り組む数学者たちに要求される才能にかなり近いものです.・・・学校の代数では，こうした種類の才能を生徒が自分のものとするために要請される困難な最初に出会うのは，代数式の因数分解のときです. このテーマの問題の中から 2 つ挙げてみましょう.
>
> x^5+x^4+1 と $x^{10}+x^5+1$ をそれぞれ因数分解せよ. 　　(コロモゴロフ P.51)

コロモゴロフは数学問題を自らが既知とすることを用いて解決する能力を高く評価している. この部分では問題の解法は示されていないが，$x^{10}+x^5+1$ の因数分解の問題を示し，x^5+x^4+1 について高校生の数学クラブの問題に一緒に考えたという.

このような問題は現在の Technology を用いることによって即座に答えを得ることができる. 計算をする楽しみが Technology によって失われてしまったとも考えられる.

Factor(x^5+x^4+1) 　　$(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

Factor($x^{10}+x^5+1$) 　　$(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

このように現在の技術の発展は今までの数学の問題をことごとく解決してしまう. 因数分解は必要なときには Technology を用いればよい.

この 2 つの結果を見て，x^m+x^n+1 が因数分解できる組（m，n）を問題にしたときに，Technology では一般解は求められないことに気がついた，（5，4）や（10，5）は特殊解であり，今までの数学の問題は具体的な（m，n）が与えられた時で，Technology で簡単に解けた. しかし，一般論を問題にすることは Technology ではできない.

因数定理の拡張

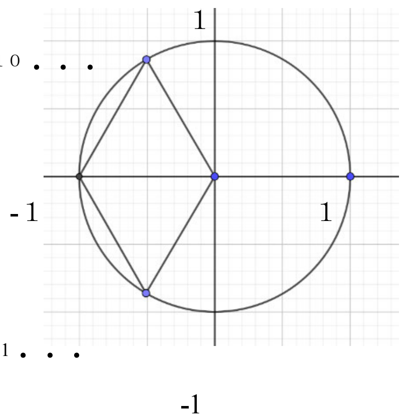
　因数定理 f(x)が x-a を因数に持つ⇔f(a)=0

　この因数定理を拡張して

　f(x)が x^2+x+1 を因数に持つ⇔f(ω)=0　ただし ω は $x^2+x+1=0$ の解

因数定理において x ＝ω を代入して x^2+x+1 を因数に持つかの判定ができることを知った．そしてこの因数定理の拡張は $x^2+x+1=0$ の解を複素平面に図示することによって，平行四辺形の原理と複素数の性質を考えることができた．必要な計算は Technology によって常に確認できる．

(x^2+x+1)を因数に持つことと，複素数との関係



　x^2+x+1 を因数に持つ場合，

　ω を代入することによって式の値＝０になる．

　因数定理の 2 次式版に当たる特殊な場合である．

　この結果を用いることによって $x^{10}+x^5+1$ は因数分解可能なことがわかる．

　　$x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

　因数分解ができる指数の組み合わせを作ることができる．

　　　x^m+x^n+1 のとき，(m，n)とする　m＞n

　因数分解可能な組み合わせ

　　　(4,2)　(7,2)　(7,5)　(10,8)　(10,5)　(10,2)・・・

　　　(2,1)　(5,4)　(5,1)　(8,7)　(8,4)　(8,1)・・・

問題では個々の具体的な値を求めるのではなく一般論を求める．Technology の活用によって，作ることができた仮説（予想）に対して，その正しさを証明として示すことは数学的活動にとって必要不可欠であるが，仮説を立てることによって数学の世界が広がる．

補題

　x^m+x^n+1 の因数分解可能な組み合わせ (m，n)は（3s+1，3t+2）または（3t+2，3s+1)

　　　　　　　　　　　　　　　　　　ただし s，t は任意の自然数

　このとき x^m+x^n+1 は x^2+x+1 を因数として持つ．

Technology は途中の計算の正しさを確認できることと，予想を立てることに貢献する．この意味で Technology は数学を考える良き補助の役割をする．予想を立てることの訓練もこれからの数学教育の課題になる．与えられた問題を解くこと（Problem Solving）だけではなく，問題作成・

仮説作りへと数学教育が新しい分野を拓くであろう.

問題作成 仮説作成	→ 数学 →	問題解決→発展(Open End)

参考文献

(1) A.H.コロモゴロフ，学問と職業としての数学，大竹出版，2003

(2) 渡辺信，$x^{10}+x^5y^5+y^{10}$ の因数，解と問題解決，福井高等専門学校グラフ電卓研究会，2014

(3) 渡辺信，数学問題から発展学習へ，全国数学教育学会，2020

【報告】

2020.01.17

「記述式」について

・記述式とは

記述式は問題の出題形式です。記述式は、ペーパーテストで、「思考力」「判断力」「表現力」などの能力（以下、諸能力とする。）が育っているかどうかを評価するために主として使われてきました。諸能力が育っているかどうかを評価するために、ペーパーテストを使用することには一定の限界があることは周知のことですが、これまで、出題の仕方や採点の仕方などで様々な改善が加えられ、長い間使われてきています。

全国学力・学習状況調査（文部科学省、平成 19 年度から実施、以下、全国調査とする。）で整理している問題形式の分類をもとにして、記述式の問題の対象を整理し、当協会の実用数学技能検定で出題してきた記述式及び論述式の問題の対象との関連を明らかにしたい。

全国調査では問題形式を、選択式、短答式、記述式に分類し、国として初めて記述式の問題を本格的に出題してきています。全国調査の解説資料（「中学校数学」（平成 31 年度）から引用）によると、問題形式の分類は次のようになっています。

- 選択式…複数の選択肢から正しいものを選択する。
- 短答式…数値や用語など主として単語で答える。
- 記述式…事柄について文などで説明する。

当協会では従来から、上記の短答式と記述式を合わせて「記述式」と捉えてきました。そして、記述式の問題を、論理読解力を問う問題と論理構成力を問う問題に分けてきました。そして、後者の論理構成力を問う問題をとくに論述式の問題として出題してきました。

これらを踏まえて、当協会で考える問題形式を分類整理すると次のようになります。

- 選択式…複数の選択肢から正しいものを選択する。
- 短答式…数値や用語など主として単語で答える。
- 記述式…事柄について文や図・表・グラフ※などで説明する。
  1．論理読解力：解法が示された問題に対して
  その筋書きを読み取って答える力
  2．論理構成力：解法が示されていない問題に対して
  自分で筋書きをつくって答える力（論述式）

「記述式」

当協会では、「思考力」「判断力」「表現力」を、より的確に評価するためには、論理構成力を問う記述式の問題、すなわち論述式の問題による評価が必要であると考え、論述式の問題を一貫して出題してきています。

当協会の分類で考えると、全国調査及び大学入学共通テスト試行調査（以下、試行調査とする。）の調査問題として出題された記述式の問題は、論理読解力を問う問題に分類され、論理構成力を問う問題はほとんど出題されていません。試行調査では記述式の問題として、

短答式に近い問題も出題されています。

数学検定・算数検定では発足当初から論述式の問題を出題してきています。その理由は、論述式の問題に対して、受検者は自由な発想で問題と向き合って、事象を数理的に捉え、数学の問題を見出し、問題を自立的に解決することができると考えているからです。

このように考えると、論述式の問題では、問題によっては複数の解法が生じることがあります。したがって、論述式の問題の採点では、解答の結果だけではなく解法に応じてその過程についても的確に評価して正解としてきています。たとえば、結果が合っていなくても途中までの考え方が数学的に正しければ部分点を付与し、結果が合っているか合っていないかだけで評価するのではなく、より細やかな評価をしてきています。したがって、考え方が正しくない解答に対しては、たとえ結果が合っていても不正解とすることがあります。

上記のような考えに基づいて、当協会では数学力を評価するためには「記述式」、とくに論述式の問題による評価が重要であると考え、検定問題を作成してきています。

※PISA の読解力（リーディング・リテラシー）は、文章などの連続的なテキストだけでなく、図・表・グラフなどの非連続的なテキストも対象にしている。当協会も PISA と同様に広義に言語力をとらえて、文章による表現と図・表・グラフによる表現を同等に考えている。

2020.01.17

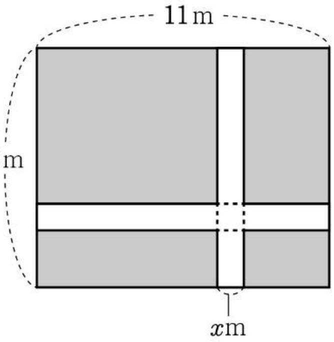
・数学検定の問題例・採点例

３級２次：数理技能検定

【問題】（論理読解力を問う問題）

次の問題では（13）が（14）の誘導になっているので、（14）で方程式をつくる方法は１通りになります。したがって、（14）は示された解法の筋書きを読み取って答える論理読解力を問う問題です。

6 縦が９m，横が１１mの長方形の土地があります。この土地の縦，横に同じ幅の道をつくって，残りを畑にします。道の幅を x mとして，次の問いに答えなさい。



（13） 道をつくったあとの畑の面積は何m^2ですか。xを用いて表し，展開した形で答えなさい。（表現技能）

（14） 道をつくったあとの畑の面積を８０m^2にするとき，道の幅を何mにすればよいですか。単位をつけて答えなさい。この問題は，計算の途中の式と答えを書きなさい。

【模範解答】

問題解決のプロセスは、次の３つの段階からなります。数学の問題として捉え数学を使って表現する段階（数学化）、数学的に表現したものを数学的に的確かつ能率的に処理する段階（数学的処理）、得られた結果を最初の問題に戻って適切であるかどうかを確認する段階（解釈・吟味）という３つの段階です。

上記の問題(14)の解法は、畑の面積の関係から方程式をつくって（数学化）、その方程式を解き（数学的処理）、得られた２つの解が題意を満たすかどうかを吟味する（解釈・吟味）という３段階からなります。採点するうえで、それぞれの段階で部分点が付与されます。

(13) $x^2-20x+99$ (m^2)

(14) $x^2-20x+99=80$ ←数学化（方程式を立式する）

$x^2-20x+19=0$

$(x-19)(x-1)=0$ ←数学的処理（方程式を解く）

$x=1,\ 19$

$0<x<9$であるから ←解釈・吟味（解を吟味する）

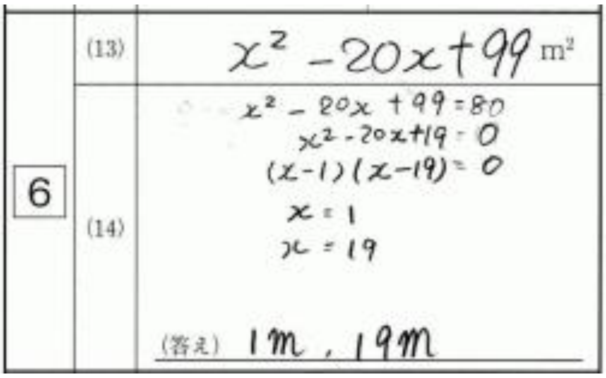
$x=1$

(答え) 1m

2020.01.17

【解答例】

この解答例の場合、数学化、数学的処理の段階まではできていますが、方程式を解いて得られた解を吟味する段階が不十分なため、部分点にとどまっています。



6

(13) $x^2-20x+99$ m²

(14)

$x^2-20x+99=80$

$x^2-20x+19=0$

$(x-1)(x-19)=0$

$x=1$

$x=19$

(答え) 1m，19m

←解を吟味する段階が不十分

準２級２次：数理技能検定

【問題】（論理構成力を問う問題）

次の問題は、解法が示されていません。したがって、受検者それぞれが問題文を解釈して筋書きをつくって答える論理構成力を問う問題、すなわち論述式の問題となります。この問題では複数の解法が考えられます。

4 a を定数とします。放物線 $y=x^2-ax+a-1$ について，次の問いに答えなさい。

（5） この放物線が x 軸と接するときの a の値を求めなさい。

【模範解答】

模範解答は判別式を用いる解法を示していますが、この問題には数学化の方法が複数あるので、複数の解法が存在します。複数の解法が存在する場合、採点の基準はそれぞれの解法に合わせて設定されます。

模範解答では、放物線が x 軸と接する条件を判別式が 0 となることと捉えて方程式をつくり（数学化）、それを解いています（数学的処理）。得られた解が、題意を満たすことを確認して（解釈・吟味）、答えとします。

（5） ２次方程式 $x^2-ax+a-1=0$ の判別式を D とすると

$D=(-a)^2-4(a-1)$

放物線が x 軸と接するとき，$D=0$ であるから

$(-a)^2-4(a-1)=0$

←数学化（方程式を立式する）

$a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$

←数学的処理（方程式を解く）

$a=2$

←解釈・吟味

（答） $a=2$

【解答例１】（判別式を用いる解法）

模範解答と同じ解法で解いています。数学化、数学的処理、解釈・吟味の３段階をそろえて、わかりやすく記述しています。

（5）	※解法の過程を記述してください。 判別式をDとし，放物線がx軸と接するため D=0であるから， $D=a^2-4\cdot1\cdot(a-1)$ $a^2-4(a-1)=0$ $a^2-4a+4=0$ $(a-2)^2=0$ $a=2$ $a=2$

【解答例２】（グラフの形状を用いる解法）

数学化の段階で、放物線が x 軸と接するのは頂点の y 座標が０となることと捉え、頂点の座標をもとめた後、方程式をつくっています。数学的処理の段階で、方程式の両辺に４をかけ、さらに（－１）をかけるという工夫がされています。

（5）	※解法の過程を記述してください。 $x^2-ax+a-1=0$ x軸と接するグラフ ⇔ 頂点 y座標が0 $(x-\frac{a}{2})^2+a-1-\frac{a^2}{4}$　$(\frac{a}{2},\ a-1-\frac{a^2}{4})$ $-\frac{a^2}{4}+a-1=0$　$-a^2+4a-4=0$ $a^2-4a+4=0$ $(a-2)^2=0$ $a=2$

2020.01.17

【解答例３】（最小値を用いる解法）

数学化の段階で、放物線が x 軸と接するのは関数 $y=x^2-ax+a-1$ の最小値が０となることと捉えて、最小値を求めた後、方程式をつくっています。数学的処理の段階で、両辺に（－１）をかけて、方程式を解きやすくする工夫が見られます。

得られる方程式は解答例２の方程式と同じですが、数学化の方法は異なります。

(5)	※解法の過程を記述してください。 $y=x^2-ax+a-1$ $=(x-\frac{1}{2}a)^2-\frac{1}{4}a^2+a-1$ $x=\frac{1}{2}a$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}a^2+a-1$ をとる。 x軸と接する，つまり（x，0）より 最小値が0になればいいので， $-\frac{1}{4}a^2+a-1=0$ $\frac{1}{4}a^2-a+1=0$ $(\frac{1}{2}a-1)^2=0$ $a=2$　　答 $a=2$

地域協働学力向上プログラム事業

2020年2月、「地域社会に根差した算数・数学の学力向上プログラムの構築（提案）－学校とコミュニティ・スクールの連携を通して－」を、釧路市立鳥取小学校コミュニティ・スクールに提出した。

このプログラムを提案した目的は次のとおりである。

釧路市鳥取小学校の児童は、「釧路鳥取てらこや」の指導のもと、2013年から当協会が実施する実用数学技能検定（算数検定）に取り組んでいる。以前は、釧路市の児童の全国学力・学習状況調査（全国調査）の結果が、全国でも下位グループである北海道の平均にも及ばなかったが、2018 年度の調査では、鳥取小学校の児童の成績はどの教科も北海道平均のみならず全国平均をも上回った。しかし、このように成績が上がった児童たちも中学校に進学すると、平均点は北海道平均以下に後退してしまう。

このことに対処するため、算数の学力の向上に成功した鳥取小学校とコミュニティ・スクールの実践例をもとに、他の小中学校にも導入できる学力向上プログラムを構築することが必要であると考え、鳥取小学校と算数の学力向上に関して共同研究を行うことを提案した。

2020年6月1日、「地域協働学力向上プログラム事業に関する包括連携協定書」を鳥取小学校と締結し、共同研究をすることとなった。

2020年6月1日、第350回検定（2020年2月14日実施）の正答達成率、合格率等に関して鳥取小学校と全国平均との比較、鳥取小学校の得点分布について調査した報告書を提出した。

2020年11月6日、350回検定（2020年2月14日実施）の個々の問題の答案について分析し、報告書を提出した。

2020年11月17日、鳥取小学校一本嶋校長から標準学力調査（東京書籍）の小学２年生から６年生までの４年分（平成28年～令和元年）の調査結果が、研究のための資料として送られてきた。

2021年2月12日、第367回検定を実施した。受検者数は、５級3人、６級49人、７級50人、８級55人、９級17人、10級15人、11級10人であった。小学４年生～６年生は全員が受検し、１年生～３年生は希望者のみが受検した。成績および答案について、第350回検定と同様に分析を進める。

実用数学技能検定（数学検定・算数検定）に関する調査

2020 年度、実用数学技能検定（数学検定・算数検定）に関する以下のような調査を行った。

「昨年と今年の６～７月検定受検者の学力比較の調査」
「昨年と今年の６～７月検定受検者の学力比較の調査２」
「２～５級１次検定の検定時間が 60 分から 50 分に短縮されたことによる意識調査」
「２～５級１次検定の検定時間が 60 分から 50 分に短縮されたことによる学力比較調査」
「コロナ禍における学力変化の有無の調査（6～7 月検定分）」
「コロナ禍における学力変化の有無の調査（11 月検定分）」
「２次方程式の解の誤答分析」
「Ａ高等学校（石川県）の受検者の調査・分析」
「大学入試共通テストの研究（ⅠＡ・ⅡＢ）」
「北区立中学校（公費受検）の受検者調査」

桑田先生の数学講座

2019 年度は、桑田孝泰先生（東海大学理学部情報数理学科教授）が数学講座を担当した。７月 13 日と 10 月 12 日の２回にわたって開講した。高等学校の数学Ⅰ・Ⅱ履修程度でも理解できるほど、説明が丁寧であるため、受講者の満足度も高かった。2020 年２月 22 日にも数学講座を予定し、受講者を募集したが、新型コロナウィルス感染症の感染拡大により中止となり、その後 2020 年度末まで開講できなかった。

第１回 2019.07.13

・講座名　「円と格子点の問題について」―ガウス整数の素因数分解の一意性とその応用

・内容

⑴どんな自然数 n についても，ちょうど n 個の格子点を含むような平面上の円板(円およびその内部)が存在するだろうか？

これはシュタインハウスが 1957 年に提起した問題である。この問題に対する解答はすでに与えられている。では,

⑵どんな自然数 n についても，ちょうど n 個の格子点を含むような平面上の円が存在するだろうか？

こちらの問題もすでにシンゼルによって与えられている。

これら円と格子点に関する問題について，わかり易く解説する。後者の問題では，ガウス整数の素因数分解の一意性を紹介し，その応用としてシンゼルの定理を証明する。

・受講者数 14 人（小学生１人、高校生１人を含む）

第２回 2019.10.19

・講座名　複素数と正射影

・内容

空間図形の平面への正射影に関するガウスの基本定理(Axonometry　の基本定理)を紹介する。立方体や正四面体などの空間図形の正確な正射影図を平面上に描くのに用いられる。まず複素数平面を用いると証明が簡潔になる初等幾何の定理を通して複素数平面の復習を行い，ついでガウスの基本定理をわかりやすく解説していく。

平面上に描いた四面体の投影図が，正四面体の正射影であるための必要十分条件を与える Eastwood と Penrose の定理も紹介する。

・受講者数 14 人（小学生１人を含む）

文部科学省認定「高校生のための学びの基礎診断」測定ツール

平成30年（2018年）12月26日に認定された「高校生のための学びの基礎診断」測定ツールについて、文部科学省に年度ごとに事業報告を提出している。

2019年度に「高校生のための学びの基礎診断」として受検した高校生の数は、下の表のとおりである。

実施校が実用数学技能検定（以下「数学検定」という。）を申し込むにあたって、受検の目的を調査していないため、2019年度に「高校生のための学びの基礎診断」として数学検定を実施したことが明確にわかっている高等学校は１校のみだった。数検スコアについては、実施校は０校だった。

測定ツール名	実施校数（校）	受検者数（人）			受検者合計（人）
		高等学校３年生	高等学校２年生	高等学校１年生	
実用数学技能検定準２級	1	1	73	0	74
実用数学技能検定３級	1	0	0	75	75
数検スコア総合診断数Ⅰ・数A	0	0	0	0	0
数検スコア基礎診断数Ⅰ・数A（項目別診断）	0	0	0	0	0

2020年度については、各測定ツールとも実施校は０校であった。

このほか、試験実施後の検証に関して、検証の方法、内容について、また、今後の改良の方向性等について、測定ツールごとに報告書を提出した。

免許状更新講習

当協会は、平成 31 年（2019 年）3 月 8 日付けで文部科学省総合教育政策局長から免許状更新講習を開設できる者として指定された。

令和元年（2019 年）9 月 8 日（日）、9 月 22 日（日）、9 月 29 日（日）および令和２年（2020 年）9 月 20 日（日）、9 月 21 日（月祝）、11 月 22 日（日）、11 月 23 日（月祝）に免許状更新講習を開講した。講師は清水理事長と渡邉理事が担当した。

平成 31 年度

開講日	令和元年（2019 年）9 月 8 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（小学校算数科を中心に）
講習の概要	小学校算数科にかかわる内容を中心に、つぎの構成で講習を実施する。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷 ２．平成期の小学校学習指導要領の改訂と算数科 ３．算数科における問題発見とその解決（具体例を通して） ４．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現 （（1）背景・考え方） ５．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現 （（2）授業づくり・学習評価） ６．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（（3）模擬授業）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	６人

開講日	令和元年（2019 年）9 月 22 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（CAI の活用を中心に）
講習の概要	算数･数学において現在は情報機器活用はほとんど行われていません。将来の算数･数学での授業の目標は計算技能から創造性の育成へと変わります。このような変化の時代において先生方が情報機器を使うことを経験することは重要と考えます。講義では各自が情報機器を手にとって実際に使うことを経験し、創造的な算数･数学の思考方法を学びます。また、授業においては算数･数学の活用を具体的に進めることができるような訓練を行います。Work Shop 方式を活用します（情報機器はこちらで用意します)。
担当講師	渡邉　信
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	８人

開講日	令和元年（2019 年）9 月 29 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（中学校数学科を中心に）
講習の概要	中学校数学科にかかわる内容を中心に、つぎの構成で講習を実施します。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷 ２．平成期の中高等学校学習指導要領の改訂と数学科 ３．数学科における問題発見とその解決（具体例を通して） ４．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現 （（1）背景・考え方） ５．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現 （（2）授業づくり・学習評価） ６．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現（（3）模擬授業）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	７人

令和２年度

講習はすべて対面型で予定していたが、新型コロナウィルス感染症の拡大にともない、認定後にオンライン型への変更が認められることとなり、それぞれの講習を同日同時刻に対面型とオンライン型で同時に行った。

開講日	令和２年（2020 年）9 月 20 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（小学校算数科を中心に）
講習の概要	小学校算数科にかかわる内容を中心に次の構成で講習を実施する。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷(算数科を中心に) ２．新小学校学習指導要領(平成 29 年改訂)と算数科 ３．算数学習の現状(各種調査の結果から) ４．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(1)背景・考え方・授業づくり） ５．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(2)模擬授業(その１)） ６．算数科における主体的・対話的で深い学びの実現（(3)模擬授業(その２)） （小中接続及び義務教育と高等学校教育の接続の観点から中学校・高等学校等の数学科教諭も対象とする。）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	６人（うちオンライン型２人）

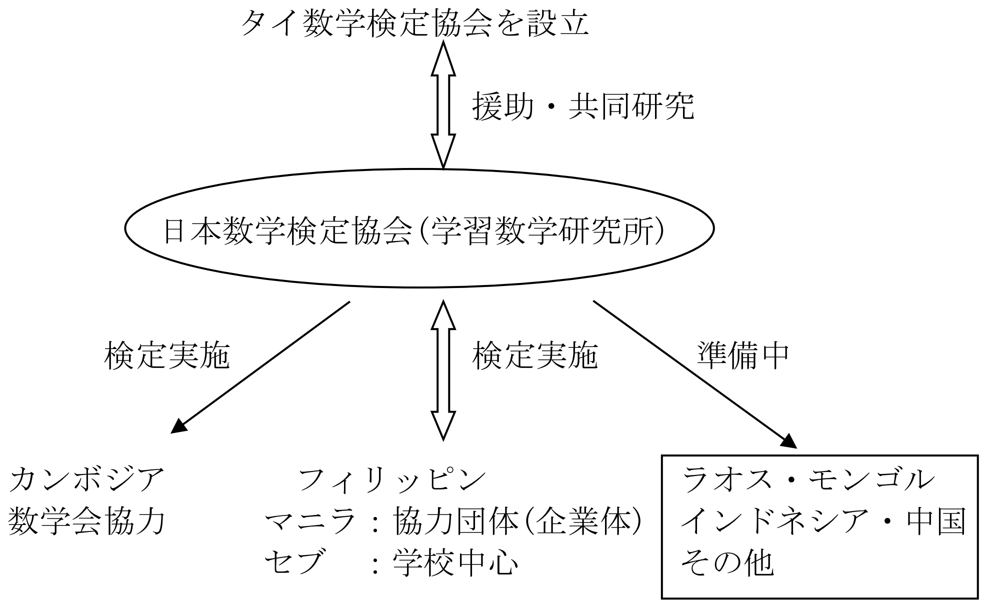
開講日	令和２年（2020 年）９月 21 日（月祝）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（関数的な考え方の授業の在り方と問題作成の研修）
講習の概要	関数は小学校から高等学校まで一貫して学ぶ数学的に重要な概念である。関数の授業で電卓を使用した場合、授業をどのように変えることができるかを先生方と検討する。生徒に「考える」ための手段として情報機器の活用を経験させることは重要である。実際にスマートフォンを使いながら授業を実施することを経験し、創造的な算数･数学の思考方法を学ぶ。授業において算数･数学の活用を具体的に進めることが出来るような方法を作り出していく。Work Shop 方式を活用し、みんなで話し合いながら進める。算数及び数学の中で関数的な思考を扱うために、受講対象者に制限は設けない。（スマートフォン持参のこと）
担当講師	渡邉　信
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	６人（うちオンライン型３人）

開講日	令和２年（2020 年）11 月 22 日（日）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（中学校数学科を中心に）
講習の概要	中学校数学科にかかわる内容を中心に次の構成で講習を実施する。 １．平成期の学習指導要領改訂の変遷(中･高等学校の数学科を中心に) ２．新中・高等学校学習指導要領(平成 29・30 改訂)と数学科 ３．数学学習の現状(諸調査の結果から) ４．数学科における主体的・対話的で深い学びの実現（(1)背景・考え方・授業づくり） ５．数学科における主体的･対話的で深い学びの実現（(2)模擬授業(その１)) ６．数学科における主体的･対話的で深い学びの実現（(3)模擬授業(その２)) （小中接続の観点から小学校教諭も対象とする。）
担当講師	清水　静海
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	７人（うちオンライン型４人）

開講日	令和２年（2020 年）11 月 23 日（月祝）
講習の名称	【選択】これからの算数・数学教育（具体的な関数を活用した関数の授業の在り方と問題作成の研修）
講習の概要	電卓を使用すると、授業をどのように変えることができるかを話し合う。具体的な関数を用いて授業の進め方を検討する。授業の中で電卓を使用した場合、「数学嫌い解消」にもなる。社会が激動する時代において、生徒に「考える」ための手段として情報機器の活用を経験させることは重要である。講義では各自が情報機器を実際に用いて授業をおこなうことを経験し、創造的な算数･数学の思考方法を学ぶ。授業において情報機器が算数･数学を理解するための補助となることを考えたい。Work Shop 方式を活用する。算数・数学の中で関数的な思考を扱うために受講対象者に制限は設けない。（スマートフォン持参のこと）
担当講師	渡邉　信
主な受講対象者	小学校教諭、数学科教諭（中学校・義務教育学校・高等学校・中等教育学校・特別支援学校）
受講者数	６人（うちオンライン型４人）

数学検定の海外への普及

　学習数学研究所では海外への数学検定普及活動にも協力している。公益財団法人日本数学検定協会の普及活動とも協力しながら行った活動を記録しておく。（この記録は学習数学研究所と日本数学検定協会普及部の活動と重複する）



数学検定のための海外出張報告

年度	期間	国	内容
2019 年度	3 月 29 日～4 月 2 日	タイ	Open-Class 生涯学習セミナー
	5 月 1 日～5 日	ラオス	PakseTTC 数学講演会 数学検定の説明会
	7 月 6 日～11 日	スウェーデン	ALM27
	8 月 22 日～29 日	ドイツ	MGC
	10 月 29 日～11 月 3 日	ラオス	ICMMEDC2019 Work Shop in　国立ラオス大学 数学検定説明

出版

日本実業出版社

韓国語訳「ビジネスで使いこなす「定量・定性分析」大全」2020.01（中村）

学習支援

2019 年度

中央学院大学　数学検定３級講座（松本）

葛飾区立水元中学校、葛飾区立金町中学校、葛飾区立中川中学校、葛飾区立柴又小学校

文京区立第八中学校、文京区立第九中学校、文京区立第十中学校（中村）

イベントの実施

2019.06.22 こどもめばえフェスタ（松本、数学コーチャー）

主催：日本ドリコム、後援：日本数学検定協会、対象：幼児・小学生

会場：3331Arts Chiyoda、

「算数検定　ミニ検定」　参加者 250 人超

2019.07.09 チャレンジセミナー「ＰＰバンドで作るセパタクローのボール」(松本、三上)

主催：墨東特別支援学校いるか分教室、会場：国立がん研究センター中央病院

参加者：小学生３人、高校生１人

2019.11.22 算数トライアスロン（中村）

主催・会場：足立区立皿沼小学校

【会議報告】

第３回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2019 年 4 月 26 日（金）10：00～11：30
場所：会議室（８人掛け）
出席者：清水、高田、渡邉、中村、松本

第１号議案　2018 年度事業の件

2018 年度学習数学研究所事業報告（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第２号議案　2018 年度決算の件

2018 年度決算（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第３号議案　2019 年度事業計画の件

（１）学習数学研究所紀要

2017 年度学習数学研究所紀要はＡ４判 150 ページ程度になる。原稿はほぼ揃い、５月中に発行する予定である。

（２）Math_for_AI センサー

人工知能に関する学習への入り口としてのセンサーを開発している。文系理系を問わず高校生以上を対象とし、ＣＢＴ方式を導入する。2020 年５月開設を計画している。

（３）研究部門

記述式問題の解答を採点するうえでのポイントをまとめて、問題のタイプ別に枠組みを作り、記述式のよさを公表する。

答案の分析等の研究を発表する際は、全国学力学習状況調査との比較をするとよい。

（４）新学習指導要領と出題内容

新学習指導要領が実施され検定基準と一致しない部分が出てくるが、出題方法を考えることで新学習指導要領に対応するよう考慮する。

（５）数学力向上についての提言

大学入試改革や高等学校改革が進行しているが、文部科学省に対して数学力向上についての提言を作成する。

審議の結果、2019 年度事業計画は全会一致で承認された。

第４号議案　2019 年度予算の件

2018 年度の決算ベースで予算を組むことが提案され、審議の結果、全会一致で承認された。

第４回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2019 年 10 月 4 日（金）17：15〜18：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　2019 年度免許状更新講習の件

免許状更新講習履修認定委員会より 2019 年度開催の履修認定について報告され(別紙)、審議の結果、全会一致で承認された。

履修認定年月日を 2019 年 10 月 4 日とし､10 月 8 日に履修証明書を発送することとした。

第２号議案　2020 年度免許状更新講習の件

2020 年度の免許状更新講習について審議した結果、2020 年 9 月 20 日（日）、21 日（月）及び 11 月 22 日（日）、23 日（月）に文昌堂ビル 10 階会議室で開催すること、認定の申請は 4 月に行う予定で準備を進めることが全会一致で承認された。

第３号議案　その他

（１）学習数学研究所紀要

2018 年度学習数学研究所紀要を年内に発行し､続けて 2019 年度版を 2020 年度早々に発行する予定である。

（２）検定問題品質会議

2019 年度検定問題品質会議を 2020 年 1 月 26 日（日）に開催することが決定した。

第５回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2019 年 12 月 4 日（水）13：00～15：00

場所：リフレッシュエリア

出席者：清水、渡邉、松本

第 1 号議案　検定問題の記述式の件

検定問題に対して、協会における記述式の定義及び記述式問題のよさについて討議した。

第 2 号議案　学習数学研究紀要の件

2018 年度学習数学研究所紀要は原稿がそろい次第発行する。2019 年度版については 2020 年 3 月までの活動についてまとめ、6 月に発行することとした。

第 3 号議案　運営会議の件

定例の運営会議を 2020 年 2 月 17 日（月）に開催することとなった。

第６回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2020 年 2 月 17 日（月）13：00～15：00
場所：会議室（８人掛け）
出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　学習数学研究紀要の件

(1) 配付先について

創刊号（第１巻)、第２巻ともに 200 部発行し、紀要の執筆者、検定問題品質委員、その他に献本した。

残部は、創刊号が 145 部、第２巻が 162 部である。必要部数は保管しながら、文部科学省の担当者等、当協会と関係がある方々に献本することとした。

(2) 第３巻について

学習数学研究紀要第３巻の発行については、第５回運営会議からの継続審議である。第３巻は 2019 年度（2019.04.01～2020.03.31）の実績をまとめ、2020 年 6 月初旬に発行することが、全会一致で承認された。

研究員以外の職員からも、数学教育関連の学会で発表した内容をまとめて紀要に掲載することを勧めることとした。

第２号議案　2020 年度免許状更新講習の件

第４回運営会議で決議された日時、場所について次のとおり確認した。

日時：9/20（日)、9/21（月・祝）11/22（日)、11/23（月・祝)、各 9：10～16：50
場所：文昌堂ビル 10 階会議室

免許状更新講習認定申請第４回（締切 3 月 16 日）に申請し、募集開始を 5 月 16 日とすることについて審議し、全会一致で承認された。

検定結果から分かることについて、問題作成について、記述式について等当協会独自の内容を、研究員または職員がゲストスピーカーとして講義することを検討することとなった。

第３号議案　職業と数学に関するアンケート調査の件

社会人を対象として、従事している仕事とそこで利用する数学についてのアンケート調査を実施する。調査の目的は、調査結果を児童生徒及び学生に伝えることによって、算数数学の学習意欲を喚起することである。

職業と数学に関するアンケート調査について審議した結果、全会一致で承認された。

第４号議案　地方自治体における検定実施の件

(1) 釧路市

地域社会に根差した算数・数学の学力向上プログラムの構築（提案）を、釧路市立鳥

取小学校コミュニティ・スクール協議会委員である大越氏に提出したことが報告された。算数検定を受検した鳥取小学校の児童を対象としたアンケートの調査項目について検討した。

(2) 袋井市

第346回検定（2019年11月15日実施）７級～10級の結果分析を提出したことが、普及部調査分析グループ稲葉君から報告された。

第５号議案　検定問題品質会議の件

2020年3月、検定問題品質会議の増田委員が台東区立御徒町台東中学校校長を定年退職するのに伴って、検定問題の品質の向上を目的とする問題の検討会を発足し、委員として検定問題に対するコメントをいただくことが提案された。

審議した結果、全会一致で承認された。

第６号議案　新規事業の件

検定問題作成に関して情報を共有する会議を開催する。算数で用いられる用語を４級、５級の検定問題にどのように記述するか等を検討する。年間３回程度開催する。

情報を共有する会議について審議した結果、全会一致で承認された。

第７号議案　次回運営会議の件

第７回運営会議は2020年4月22日（水）16：30～18：30に開催することとなった。主な議題は、2019年度事業報告、決算及び2020年度事業計画である。

第７回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2020 年 5 月 12 日（金）16：00～17：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　2019 年度事業の件

2019 年度学習数学研究所事業報告（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第２号議案　2019 年度決算の件

2019 年度決算（別紙）について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第３号議案　2020 年度事業計画の件

以下の４つの項目に対して、新型コロナウィルス感染症の感染拡大による計画の変更について報告があり、審議の結果、全会一致で承認された。

（１）学習数学研究所紀要

2019 年度学習数学研究紀要第３巻は、発行を今秋以降に延期することが報告され、全会一致で承認された。

（２）地域協働学力向上プログラム事業

地域社会に根差した算数・数学の学力向上プログラムの構築（提案）を、釧路市立鳥取小学校に提出した。鳥取小学校との協定締結は 4/28 に予定していたが、延期することとなった。

（３）桑田先生の数学講座

2020 年 5 月 23 日（土）「２次曲線と２次曲面の幾何」を予定していたが、延期することとなった。

（４）その他

経費がかかる活動は控えることとなった。

第４号議案　2020 年度予算の件

新型コロナウィルス感染症の影響を考慮しつつ経費削減を念頭に置き、2019 年度に基づいて経常経費を執行していく。別途 2020 年度の経費について検討する。審議の結果、全会一致で承認された。

第８回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2020 年 9 月 25 日（金）10：15〜11：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第 1 号議案　2020 年度免許状更新講習オンライン型講座の件

新型コロナウィルス感染症に対応するため、2020 年度の免許状更新講習を、対面型を基本とし希望者はテレビ会議システムを用いた同時双方型の遠隔授業による講習に実施形態を変更することとして、8 月 17 日付けで文部科学省に変更届を提出し、認可されたことが報告された。この件について、全会一致で承認された。

第 2 号議案　2020 年 9 月免許状更新講習の件

免許状更新講習履修認定委員会より 2020 年 9 月 20 日および 21 日に開催した免許状更新講習の履修認定について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第９回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2020 年 12 月 1 日（火）13：15～14：00

場所：会議室（８人掛け）

出席者：清水、渡邉、松本

第 1 号議案　2020 年 11 月免許状更新講習の件

免許状更新講習履修認定委員会より 2020 年 11 月 22 日および 23 日に開催した免許状更新講習の履修認定について報告され、審議の結果、全会一致で承認された。

第 2 号議案　2021 年度免許状更新講習の件

2021 年度の免許状更新講習について審議した結果、2021 年 9 月 19 日（日）、20 日（月祝）及び 11 月 21 日（日）、23 日（火祝）に対面型またはオンライン型で開催し、対面型は文昌堂ビル 6 階リフレッシュエリアで行うこと、認定の申請を 2 月 16 日までに行えるよう準備を進めることが全会一致で承認された。

第 3 号議案　その他

（1）学習数学研究所紀要

2019 年度学習数学研究所紀要を年度内に発行し、続けて 2020 年度版を 2021 年度早々に発行する予定である。

（2）検定問題品質会議

2020 年度検定問題品質会議は、新型コロナウィルス感染症の感染拡大により中止することとした。

第 10 回学習数学研究所運営会議　議事録

日時：2021 年 1 月 22 日（金）15：00～16：00

場所：会議室（８人掛）

出席者：清水、渡邉、松本

第１号議案　免許状更新講習の件

（１）2021 年度の講習

日時は、9/19（日）、9/20（月・祝）、11/21（日）、11/23（火・祝）、各 9：10～16：50 とする。

形式は、対面型を基本とし、希望者はオンラインによる同時双方向型で受講できるようにする。

対面型講習の場所は、文昌堂ビル６階リフレッシュエリアとする。

申請を第３回 2/16 までに行い、4/16 から募集可能なように進める。

審議の結果、全会一致で承認された。

（２）2022 年度以降の講習

完全オンライン型講習について審議した結果、実現性も含めて検討することとなった。

第２号議案　学習数学研究紀要の件

当初の予定を変更して、2019 年度および 2020 年度（2019.04.01～2021.03.31）の実績を１冊にまとめ、学習数学研究紀要第３・４巻として 2021 年６月に発行することとなった。原稿の提出期限を 2021 年３月末とする。

第３号議案　検定問題品質会議の件

2021 年１月（２月）は、新型コロナウィルス感染症の感染拡大による影響を受け、中止とした。

2022 年については、検定問題について紙面上で意見を伺うという形式で実施することが検討され、全会一致で承認された。

第４号議案　次回運営会議の件

主な議題は、2020 年度事業報告、2020 年度決算及び 2021 年度事業計画である。日時は、後日改めて定める。

検定問題品質会議

2019年度検定問題品質会議

日時：2020年1月26日（日）13時30分～20時

場所：文昌堂ビル　１０階会議室（全体会＋小中部会、情報交換会）、
6階ﾘﾌﾚｯｼｭｴﾘｱ（高大部会）

１．全体会（１０階会議室）

（1）理事長挨拶

清水静海理事長（帝京大学教授）

（2）新委員紹介

吉野薫（日本数学検定協会），國井英明（日本数学検定協会）

（3）講演

「問題作り」田中紀子（愛知県立旭丘高等学校）

（4）全体会のまとめ

渡邉信常務理事

２．分科会

・幼児・小中部会（１０階会議室）

幼児関係１人、小学校５人、中学校４人、協会関係６人

・高大部会（6階リフレッシュエリア）

高等学校５人、大学２人、協会関係４人

３．情報交換会（１０階会議室）

幼児関係１人、小学校４人、中学校４人、高等学校４人、大学３人、
協会関係１５人

2020年度検定問題品質会議

新型コロナウィルス感染症感染拡大の影響による経費削減のため、2020年度は中止することとなった。

2021年度については、検定問題について紙面上で意見を伺うという形式で実施することとなった。

検定問題研究会

日時：2019年7月21日（日）14時～16時

場所：文昌堂ビル10階会議室

議題：これからの検定問題のあり方について

参加者：清水、渡邉、松本、検定問題品質委員

検定問題等検討会

2019 年度

2019.04.23（第 18 回）

「記述式の採点について」（松本)、「試行錯誤だけの問題は数学の問題か？」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、加藤、藤原

2019.05.21（第 19 回）

「全国学力・学習状況調査　記述式の問題について（算数)」

「「合格率および正答達成率」の活用」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、阿部、加藤

2019.06.19（第 20 回）

「実用数学技能検定の「実用」」（渡邉）、「これからの検定問題について」

参加者：清水、渡邉、松本、中村、大村、藤原

2019.07.17（第 21 回）

「割合に関する記述式問題の答案分析」（松本）

「学習数学研究所紀要の発行について」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、加藤、三上

2019.08.20（第 22 回）

「小学校の統計について」（松本）、「４級正答率 6.0％の問題」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、大村、橋本

2019.09.25（第 23 回）

「全国学力学習状況調査の調査結果について（中学校数学）」

「いつまで続く筆算訓練」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、山口、黒田

2019.10.23（第 24 回）

「検定問題品質委員作成問題の検討」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、藤原、吉野

2019.11.20（第 25 回）

「プログラミング教育に関する検定問題について」（松本）

「どんな問題が記述式といえるか」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、中村、加藤、吉野

2019.12.18（第 26 回）

「袋井市の結果分析」（稲葉）

参加者：渡邉、松本、稲葉、永尾、稲田

2020.01.24（第 27 回）

「2021PISA 数学の問題例」（松本)、「数学問題は物理現象を無視？」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、稲葉、稲田、藤原

2020.02.26（第 28 回）

「大学入試センター試験　数学Ⅰ統計の問題について」

「因数分解とひらめき」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、水原、吉野、永尾、瀬良

2020.03.25（第 29 回）

「新型コロナウィルスのグラフ」（松本）、「差し替えになった問題の検討」（渡邉）

参加者：渡邉、松本、永尾、瀬良

2020 年度

2020.05.12（第 30 回）

「基本再生産数と実効再生産数」（中村）、「毎日発表されるデータを読む」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、穂積、永尾

2020.06.12（第 31 回）

「釧路市立鳥取小学校の答案分析」（松本）

「Online 検定問題の開発の提案」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、永尾

2020.07.14（第 32 回）

「暗記する数学」（穂積）、「数学用語と他教科言語」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、穂積、永尾

2020.08.04（第 33 回）

「学習モチベーションの分析」（永尾）、「数学における男女差の傾向」（穂積）

「数学問題と著作権」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、穂積、永尾

2020.09.08（第 34 回）

「数学検定１級（１次＆２次）正答達成率・合格率の推移」（穂積）

「昨年と今年の６～７月検定受検者の学力比較の調査」（穂積）

「釧路市鳥取小学校　第 350 回算数検定　答案分析」（松本）

「算数における省略記号」（渡邉）

参加者：渡邉、中村、松本、穂積、大村、永尾

2020.10.13（第 35 回）

「検定（統計）」（穂積）

「検定問題作成マニュアル（３-５級１次：計算技能検定）について」（松本）

「曖昧な言葉・状況設定」（渡邉）

参加者：清水、渡邉、中村、松本、穂積

2020.11.17（第 36 回）

「２次方程式（３級１次(19)の問題の誤答の傾向について」(穂積)

「「記述式」について」(松本)、「確率の値と心理的解釈」(渡邉)

参加者：渡邉、松本、穂積

2020.12.15（第 37 回）

「２次方程式（３級１次(20)）の問題の誤答の傾向について」(穂積)

「[国際バカロレア］の数学について」(渡邉)

参加者：清水、渡邉、松本、中村、穂積、山口

2021.01.19（第 38 回）

「インド工科大学 IIT の数学入試問題の紹介」(中村)、「共通テストと検定問題」(渡邉)

参加者：渡邉、松本、中村、穂積

2021.02.16（第 39 回）

「大学入試共通テスト(数学ⅡＢ）の考察」(穂積)、「共通テスト問題作成の良さ」(渡邉)

参加者：渡邉、松本、中村、穂積、加藤

2021.03.16（第 40 回）

「大学入試共通テスト（数学ＩＡ）の考察」(穂積)

「東京学芸大学附属小金井小学校１年生２学期さんすうテストの問題について」(松本)

「共通テスト問題作成の意味」(渡邉)

参加者：渡邉、松本、中村、穂積

第 20 回検定問題等検討会(2019. 6. 19)

実用数学技能検定の「実用」

数学コーチャーでの比例の話に出てきた問題は、数学の問題としてふさわしいかを考えたい。数学はいろいろな条件を省いて理想的な問題にする。

問題　新幹線が時速 200Kmで走っています。東京を出発して 2 時間後には名古屋を通過しました。3 時間後には大阪を通過、4 時間後にはどこを通過したでしょう。 答えは　800Km の位置

比例の問題ですが、小学生・中学生には通用するでしょうか？大人ならこのような問題でも比例の問題として読み取ることができても、生徒にとって新幹線は止まるのに…と思うかもしれない。子供に対する数学と大人に対する数学の問題なのかもしれない。

小学生の教科書の問題から「実用」的な問題として、

問題　$2/5\mathrm{m}^2$の壁をペンキで塗ると 3/4L 必要でした。このとき $1\mathrm{m}^2$を塗るには何 L のペンキが必要ですか？式を書いて計算しなさい 答え　3/4÷2/5=15/8L　(この問題は分数の計算問題で「実用」ではない。)
問題　A 町から B 町まで、分速 40mで 2 時間かかりました。AB 間は何mですか。 答え 4800m　(計算練習で AB 間は何 Km で問う)
問題　お菓子の重さは 50g です。8 人に分けたら一人当たり何 g ですか。 答え 6.25g　(実用というときには答えは約 6g でよい)
問題　パイを 5 人で等しく分けます。中心角は何度ですか。パイは円とみなします。 答え 72°　(実用と見せかけて円の中心角の問題)

ここに上げた問題は「実用」的な数学の問題でしょうか？
実用というときには、計算技能、論理的思考などが対象になるのではないかと思います。また、最も現在重要な実用は、統計的処理の可能性ではないかと思う。

問題　次の卵の平均を求めなさい。　３４g,　３０g,　１２g,　４７g,　２２g 答え２９g

データが 5 個しかなく、平均に何の意味があるのであろうか。数学の方法(平均はどのようにして求めるか)を覚えているかを試すだけで、実用性はない。データを読み取る実用性とは何でしょうか。数学の計算ではなく、そのデータが何を語っているかを読み取ることで、代表値の何を使ったらよいかも含めて考えることで、計算練習としては必要がないかもしれない。計算方法・公式の確認としての数学問題と、実用的な数学との違いが明確になって欲しい。実用数学検定の「実用」が意味することは何かを考えておく必要があると思う。

（渡辺信）

第21回検定問題等検討会(2019. 7. 17)

学習数学研究所紀要の発行について

事務方の努力によって学習数学研究所紀要が発行されたことは喜ばしい。創刊号は2017年度に発行する予定であったが遅れてしまった。次回の発行を年度内に行って、2019年度の紀要を作りたい。そのために、今回の学習数学研究所紀要(以下紀要とする)をどのように発展させていくのが良いかを考えたい。

紀要の構成は今回の創刊号には規約を載せたが次の4点で構成されている。

巻頭言
研究論文
研究ノート
報告

この構成として研究論文・研究ノートの内容の在り方を問う必要がある。数学検定という特色がある内容にすることを考える必要性を明記する必要がある。検定に対して学校教育との違いを生涯学習として捉えることで、数学に対する視点が違うことを考えておきたい。巻頭言・報告も検定を意識したい。

検定協会の規約の中に、「数学及び数学教育の研究を行う」という文言を入れた。この言葉を加えるにあたって、数学学習研究所では「数学」の研究者はいないのではないかという問題点が指摘された。数学者から見た数学の研究がこの研究所では必要なのかを問うときに、問題になることは「検定にとって数学とは何か」であろう。「数学検定にふさわしい数学」ということを考えるときに、何を紀要に載せるかが問われてしかるべきであろう。

生涯学習という観点からの研究をどのように考えるかも考える問題点である。数学教育関係学会に「生涯学習」を新しい分野として入れたのは、東京で行われた東アジア数学教育学会（EACME8）であった。この時はタイのMaitree先生が、また次のEACOME9ではオーストラリアのBishop先生が中心的な役割をし、この流れを受け継いで日本数学教育学会の春期研究会に生涯学習の部門を設立した。前回の ICME では「Life Long Learning and Mathematics」としてALM（Adult Learning Mathematics）が中心になり生涯学習の部門を持ったが、次回上海のICMEには生涯学習(Life Long Learning)はない。このような数学教育の研究の流れの中に、「数学教育の生涯学習」「数学の生涯学習」を加えることは大きな特色になるが、内容の問題が問われるであろう。

新しく出版する紀要が検定という分野における中核をなすものとして位置付けたい。この紀要を出すことは、この「問題検討会」の活動が十分機能しなくてはならない。現在出版されている紀要とは違う、新しい紀要の出発として考えるとき、「問題検討会」の在り方も問われる。協会の日々の活動が研究の中心であり、協会のだれもが紀要に記事が書けるようにしたい。

（渡辺信）

第 24 回検定問題等検討会(2019. 10. 23)

Real World の問題の落とし穴

数学の問題を現実生活に合わせることは、最近の問題作成が目指す方向である。数学教育では Real World を積極的に取り入れている。ここで陥りやすい問題は、数学としては解けて、その答えが整数になる問題を作る。この時の落とし穴があることに注意したい。

> 傾斜が一定の坂の上にボールを置いて，静かに手をはなします。手をはなしてから x 秒間にボールが転がる距離を y m としたとき，$y=ax^2$（a は定数）という式が成り立つものとして，次の問いに答えなさい。ただし，$x>0$ とします。
>
> （1） 実際にボールを転がすと，手をはなしてから４秒間に２m 転がることがわかりました。このとき，a の値を求めなさい。この問題は答えだけを書いてください。
>
> （2） （1）のとき，ボールから手をはなして５０m 転がるまで何秒かかりますか。

数学の問題として解くと、(1) $y=1/8x^2$ となる。数値を代入すれば問題は解決してしまう。（2）は求めた式に数値を代入すると $50=1/8\times x^2$ で $x=20$ と整数値で答えが出る。正答率は高いであろう。数学としての問題では何も指摘することはない。しかし、実際現実問題になったらば、このようなことは起こるかが問われてもおかしくはない。「手を放してから 4 秒間に２m」はすごく遅い。答えでは「20 秒間に 50m」しか進まない。Real World では落下運動はもっと早く落下する。真下に落とすと 20 秒間には $y=4.8\times20^2$ であるから約 2 Km である。わずか 50mでは何かおかしいと思わないであろうか。ここに数学の問題としては何も落ち度はないが、何かおかしいと思っておく必要がある。数学の問題としてはいくらでも数値は変えられる。そしてできるだけ整数値が答えになるようにしたい傾向がある。

坂道の角度を 0.7 度に設定した問題もあった。手を放してもボールは転がらないということが正しい。条件として「手を放してから 4 秒間に２m」は答えが整数になることに注目して作ったのであろう。現実には起こらないことでも数学としては解ける。解ける問題ならば出題しても良いと思うであろうか。物理的に成立するかは数学の問題では考えないであろう。

もう一つの問題点

この問題は数値を代入すればできる。だから何も考えない問題であり、数学の問題としては最悪である。ただ数値を代入することでは数学的思考はない。最近少なくなっているが簡単に問題が作れる。現在の数学教育は公式を覚えることが大切で公式を作ることはしない。$y=ax^2$ を認めて代入することは工学的な数学を道具として使う手法なのかもしれない。

（渡辺信）

第 25 回検定問題等検討会（2019. 11. 20）

どんな問題が記述式といえるか

11 月 1 日突然、英語のセンター試験に民間の試験導入が延期された。現在の高校 2 年生が中学入学の時に将来のセンター試験は変更するといわれていて、多くの私立高校は国語や英語の授業カリキュラムを変えて大学入試に備えた。数学授業の改革は全くなされなかった。一時期多くの先生方は Active Learning に熱中した。そして STEM の M（数学）が入っていることもあり、あまり大きな変化はなかった。現在は国語と数学に記述式の導入としての改革が残っている。数学の記述式問題の例示問題が示された。

問題　a および b を正の実数とし、θ を鋭角とする。AB=a、AC=b、$\angle$ABC=θ である⊿ABC について、a と θ を一定としたとき、b の値に応じて⊿ABC が何通りかは異なる。そのような⊿ABC が何通り存在するかを、b のとり得る値の変化によって場合を分けて答えよ。ただし、⊿ABC ができない場合は「0 通り」と答えよ。

正答例　$0 < b < a\sin\theta$ のとき　0 通り

$b = a\sin\theta$、$b \geqq a$ のとき　1 通り

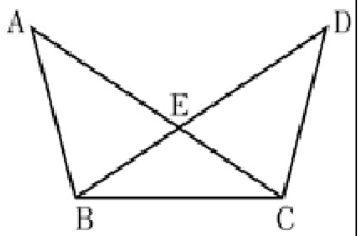
$a\sin\theta < b < a$ のとき　2 通り

正答の条件　b の範囲を a 、$\sin\theta$ を用いて正しく場合分けしており、かつ、その場合分けのもとでそれぞれ⊿ABC が何通りあるかについて、正しく記述している。

次の合同条件を書くことだけで記述式問題と言えるであろうか。出てきた答えを書くということも記述式として考え、記述式の意味を広げた解釈を使用としている。

問題　三角形の合同を用いて証明する問題　合同条件を選ぶ

右の図のように，△ABCの辺ACと△DCBの辺DBの交点をEとします。AB＝DC，AC＝DBであるとき，∠ABC＝∠DCBであることを，三角形の合同を用いて，もっとも簡潔な手順で証明します。これについて，次の問いに答えなさい。



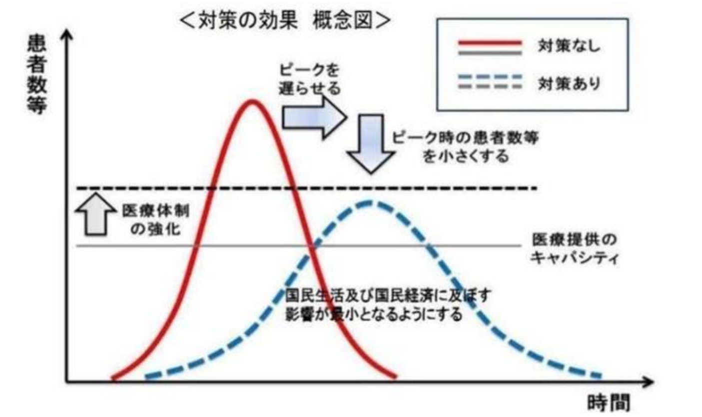
この問題の合同条件を書きなさい。（この部分は記述式か？）

現在、国語と数学の記述式問題を出題するかで問題になっている。例示されている数学の問題では解法を変えてはいけない。問題に書かれている通りしか書いてはいけないという条件が付いている。自己採点と実際の得点の開きはない。問題の指示された答えは認めない。数学において記述式とは、受検者がすべて考えたことを書くことであって、いろいろな別解があるものをいうのではないか？書くことは重要な作業であり、解法の過程を明示することでもある。

（渡辺信）

毎日発表されるデータを読む

毎日、報道(新聞・テレビ等)されるコロナウイルスの患者数について、そのデータをどのように読んでいるのであろうか。



縦軸は「患者数等」とある。患者数が増加し減少していく様子が示されている。対策を立てると(青点線グラフ)患者数は少なくなるが収束する日は遅くなる。左右対称のグラフの意味も分からない。

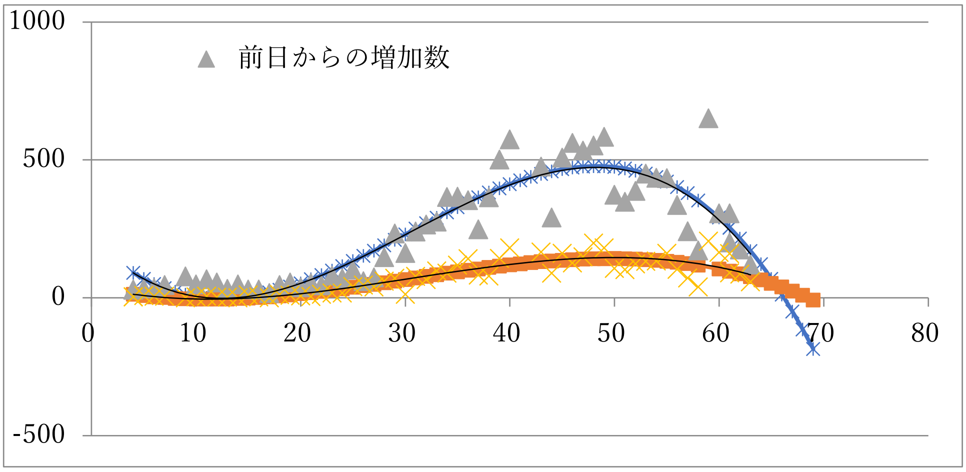
80%減少する目標の数値80はどこから出た数値なのかもわからないままに数値が使われている。そして「位置情報」として新しいデータもある。毎日報告されるデータは３月１日を起点としてグラフ化してみた。68日目は５月７日である。このグラフはやはりおかしい。日々、発表されるデータは患者数の累計である。患者数の累計が減少する意味はどのようなことを意味するのか。回帰曲線は R^2 がほぼ１であることから「誤り」に気が付かない。このグラフが減少することはない。

回帰曲線をつくったら４次関数でほぼ一致した。患者数が０になる日は 85 日後に見える。

全国　$y = -0.0016x^4 + 0.1994x^3 - 5.814x^2 + 59.739x - 118.2$　($R^2 = 0.9989$)

東京　$y = -0.0067x^4 + 0.8287x^3 - 26.756x^2 + 336.84x - 787.95$　($R^2 = 0.9989$)

そこでデータの差分を取ることにしてそのグラフを示す。グラフの読み方は分からない。



（渡辺信）

第 31 回検定問題等検討会(2020. 6. 12)

Online 検定問題の開発の提案

１．現在の状況

コロナウイルスの影響により多くの場所で仕事や教育で Online が行われている。この状況は今後便利な通信手段として社会では多くの人が利用するであろうと予測される。このような状況において数学検定でも Online 方式を取り入れることを検討したい。

(1) 大学の講義の Online

大学の Online 授業は 4 月からの対面講義ができないことを予想して急遽計画された。実施に当たり取り急ぎ、対面講義を Online 化することとした。多くの大学では対面授業に戻ることを考えているが、文部科学省は Online 授業を 60 単位まで認めるという。放送大学・サイバー大学（Soft Bank）などの今後の動きに注目したい。

(2) 企業における会議とテレワーク

働き方改革の動きがテレワークなど予想しなかった方向に進んでいる。会議も Web 会議になりあまり問題を感じない。今後 Web 会議は増えるであろう。

(3) GIGA スクール構想（政策による環境の変化）

生徒の通信環境が「一人一台」政策によって、誰もが Online 教育に参加するであろう。現在家庭環境で Online 可能な割合は低いが、この状況が変わることは注目する必要がある。通信環境については使用料などまだ問題は残るが改善されるであろう。

２．Online 検定

数学検定を Online 化することは、急いで考えておかなくてはならない。Online での検定を実施する方向でどのようなことを考えておく必要があるかを検討したい。

(1) 問題点

家庭で検定を受けことになると、もっとも問題点としては「管理」をすることが考えられる。問題点に制約されることなく実施するためにはどのようなことを考えなくてはいけないかを実施する方向を前提として考えたい。

(2) 価値ある Online 検定にするために

Online 検定はいま実施している検定以上の価値を考えなくてはいけない。学校教育が変わることは 9 月入学などでいろいろと問題になっている。Online 検定に価値を持たせたい。

(3) どのような数学問題を作るか

現在実施している特有問題を利用する

新しい問題を作る会を立ち上げる

家庭で行うことになれば電卓・数学ソフトなどを使う可能性がある

監督がいない・時間の制約ができないなど問題点は、検定問題の作製として解決する

３．実施に当たりどんな問題が考えられるか。

（渡辺信）

第 32 回検定問題等検討会(2020. 7. 14)

数学用語と他教科言語

１．数学と理科の比較：単位や規則は厳密であるべきか

(1) 体積の「かさ」は小学校算数だけ？

(2) 鶴亀算　鶴は「羽」亀は「匹」はわけるのか、わける必要はないのか？

(3) 雨量「100 ミリ」はミリ「メートル」は省略する理科（一般社会）

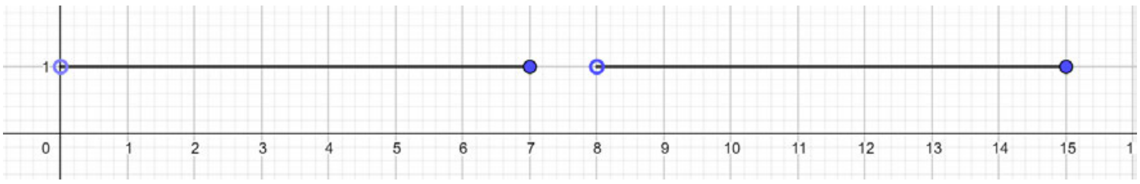
台風の速度は南に２０キロと１０メートルの南風　どちらが速い？

台風の速度と風力の速度の基準は違っても通用するが算数・数学では通用しない？

（社会では単位が違うことは気にしていない）

(4) アルカリ性・酸性で中性は理科では７。7 以上８未満が中性が数学ではよさそう？

(何もない状態を０、飽和の状態を 15、7 と 8 の間をいかに扱うか)



中性（7 と 8 の間は？）

(5) 有効数字に厳密な理科

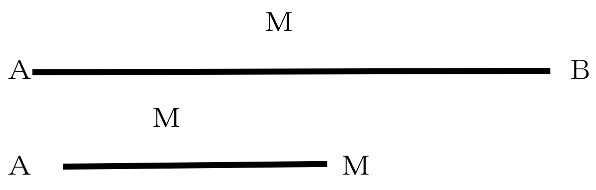
天気予報では予想では 30℃、測定値は 31.3℃ときちんと使い分けている。

このような違いを統一して扱う必要性があるのではないか。

２．プログラム言語では同じ記号が何回も使われても意味が通る

2 点Ａ，Ｂの中点をＭ

2 点Ａ，Ｍの中点をＭ



この操作を続けていくときに数学ではＭ$_0$、Ｍ$_1$，・・・、Ｍ$_n$

プログラム言語では常にＭ　（ＡＭの中点を新しくＭ？）

３．算数・数学に「近い科目」で「同じこと」を違う言葉で表現することはあるか？

（渡辺信）

第 33 回検定問題等検討会(2020.8.4)

数学問題と著作権

数学問題について引用する際、基本的には著作件法 36 条 1 項の範囲内であると解さる。問題作成に当たり注意すべきことを考えておきたい。

（試験問題としての複製等）
第三十六条　公表された著作物については、入学試験その他人の学識技能に関する試験又は検定の目的上必要と認められる限度において、当該試験又は検定の問題として複製し、又は公衆送信（放送又は有線放送を除き、自動公衆送信の場合にあっては送信可能化を含む。次項において同じ。）を行うことができる。ただし、当該著作物の種類及び用途並びに当該公衆送信の態様に照らし著作権者の利益を不当に害することとなる場合は、この限りでない。
2　営利を目的として前項の複製又は公衆送信を行う者は、通常の使用料の額に相当する額の補償金を著作権者に支払わなければならない。

範囲外にあたるケースとして想定されるのは、概ね以下のとおりです。

①検定問題として、実用数学技能検定に利用する場合にとどまらず、問題集として出版する場合。 問題集として出版する場合も、複製には該当しますが、そのような複製は試験目的ではなく、通常の複製であり、著作権者の許諾が必要になります。

②図版の引用について、同一性保持権（著作者人格権）を侵害するような態様の場合
よく言われるのは、国語や英語の問題で、出展の文章を一部空欄にする（虫食いの部分を埋めるような問題）場合であれば問題ないけれども、元の文章を（大幅に）改変して出題する場合には、同一性保持権の侵害であり、認められないとも考えられています（正直申し上げて、この点に関する確立した考え方はないと思います。)。
一方、そのまま引用されているのであれば、この問題は特に生じないと解されるところです。

また、範囲外にあたるか否かという問題とは若干異なりますが、著作権法 48 条 1 項 3 号により、出所表示について、出所を明示するという慣行があるときは明示しなければならないとされています。

さらに、下記「数学の参考書」の著作者の氏名を表示するか否かという問題もあり、この氏名表示については、公正な慣行に反しない場合には省略できるとされているところ（著作権法 19 条 3 項)、試験問題については省略できる場合も多いとしながらも、氏名表示をすることが望ましいという考えもあるところです（中山信弘・著作権法第 2 版 337 頁)。 なお、あくまでも公表された著作物であることを前提としますので、その点もご留意ください。

もともと著作権法36条は、試験問題には秘密性が要求され、時間的にも事前に権利者の許諾を得ることが困難なことが多く、実質的にも試験問題としての利用は、当該著作物の顕在的・潜在的市場に悪影響を与えることが考えにくいということから設けられたものです。ですので、秘密性の要求との兼ね合いではありますが、問題集としての出版を意識しているのであれば、著作権者に予め許諾を得ることも一つの対応であると思われます。さらにいえば、著作権法32条の「引用」で処理をするという手段もあると思いますが、これはこれで様々な要件がありますので、いったん著作権法36条の話としてコメントさせていただきました。

次のケースは問題になると思いますか。

(1) 検定協会側から見た場合

ある出版社の本の記事の中に次のような記述がありました。数学の甲子園に参加して問題を見て覚えて帰ったと考えられます。

> 発端は日本数学検定協会主催の2011年度「全国数学選手権大会」(数検団体戦；通称 数学甲子園) の予選に出題された次の問題です.
>
> $z^2 = \overline{z}$ (z は共役複素数) を満たす複素数 z をすべて求めよ.
>
> $z = x + iy$ (x, y は実数) と表すと, この方程式は
>
> $$x^2 - y^2 = x\,, \quad 2xy = -y$$
>
> となります. 後の式から $y = 0$ または $x = -1/2$ です. $y = 0$ (z は実数) なら前の式から $x=0$ または 1；$x = -1/2$ なら前の式から $y^2 = 3/4$, $y = \pm\sqrt{3}/2$ となり, 答えは次の4個です.
>
> $$0,\ 1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2} \quad (= \omega \text{ と } \omega^2 \text{ とおく}) \qquad (1)$$

(2) 相手側から見た場合

相手は「久能山東照宮」の近くに掲示された問題です。この掲示板に日光東照宮の位置の由来の記事が書かれています。そしてその答えとして、久能山東照宮から富士山頂を超えた延長線上と江戸の真北の延長線上の交わった場所として日光が決められたことを引用する問題を出題できるかということを検討する必要があります。地図上では位置には狂いがないように見えます。これを問題にできるかは著作権に触れる可能性があります。

（渡辺信）

第 36 回検定問題等検討会(2020.11.17)

確率の値と心理的解釈

今回の問題は数学というより心理学の問題として話題提供します。数学の世界では確率の値は同じで当然と問題にされないかもしれないが、社会の人々からは心理的解釈を考えると同じ値になることを認めがたい問題かもしれません。

１．確率の計算

サイコロの問題で 2 の目が続けて 2 , 2 と出る確率は 1/36 であることは分かっていても、サイコロの目が 2 , 3 と出る確率を求めることは両方とも同じであることを認めることは少し難しいと思う。

サイコロの目が 2 , 3 と出る確率の値が 1/36 にならない場合は、確率の値がいくつになるのであろうか。この値が 1/36 ではない別の値になるとしたら、その値はいくつか分からない。

十円硬貨を 2 回続けて投げた時に、表、表と続けて表が出る確率は 1/4 であるが、表、裏と出る確率も 1/4 と同じであると答える。

今回の場合は続けた結果の確率という条件は付く。(表、裏)でも(裏、表)でもよいとは考えないので、確率の値は 1/4 で同じである。続けて行う試行であるから 1/2 とは答えない。しかし、2 枚同時に投げた時という問題では、2 枚とも表、1 枚表で 1 枚裏、2 枚とも裏の結果が 3 通りから 1/3 という値も誤答例として考えられる。

サイコロを 6 回続けて投げた時、次の 3 つを起こりにくい順に並べてください。 (1)1 の目が 6 回続けにでた (2)1.2.3.4.5.6 と順序通りにでた (3)2,5,1,4,4,6 と出た

もちろん答えはすべて確率の値は同じで、問題の感じ方に間違いがある。しかし、答えは(1)→(2)→(3)という並びも考えらそうな気がするのはなぜであろうか。「同じ」「規則正しい(順序)」を重視しているか、実際に投げた時に(1)と(2)は起こったことがないことを知っているので、最も起こりやすいのは(3)と思うかもしれない。投げる一回ごとが独立試行であること、同時に投げた結果との混乱があるのかもしれない。

確率の値は初めに結果を決めておくことから始まる。結果を決めておかないと 2 回続けて 2 の目が出たのは、ほかの目(例えば今回の例で 2,3 の目が出る)が出るよりも確率的には起こりにくいと考えてしまう。数学の誤答例として、計算順序を間違えたり、小数点の位置が違ったりということは起こる間違いであるが、今回の確率では心理的に起こりやすいかを数学ではない事柄を追加している。数学としては間違えている例はほかにも考えられるであろうか。数学において『同様に確か』という言葉の厳しさを感じた。　　　　　（渡辺信）

第37回検定問題等検討会(2020.12.15)

「国際バカロレア」の数学について

グラフ電卓を使うことを前提とした「数学問題」を検討します。検定問題との違いと配点について考えます。GIGA スクール構想の政策により生徒にパソコン一人一台の時代が来るときに Technology を積極的に数学教育でも活用するでしょう。

$f(x) = x^4 + 0.2x^3 - 5.8x^2 - x + 4,\ x \in R$ とする　. 配点［合計22］

(a) 不等式 $f(x) > 0$ を解け［3］

(b) $y = f(x)$ のグラフについて,

(1) すべての極小値に対応する座標を求めよ.

(2) すべての変曲点の x 座標を求めよ.［5］

以下では $f(x)$ の定義域を区間［0,a］に制限して考える.

(c) (1) f が逆関数を持つような a の最大値を有効数字 3 桁で求めよ.

(2) その a の値に対して $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフの概形を同じ座標平面上に描け. 各々のグラフの端点の座標を明示して書き入れること.

(3) $f^{-1}(x) = 1$ を解け.［6］

さらに $g(x) = 2\sin(x - 1) - 3,\ -\pi/2+1 \leq x \leq \pi/2+1$ とする.

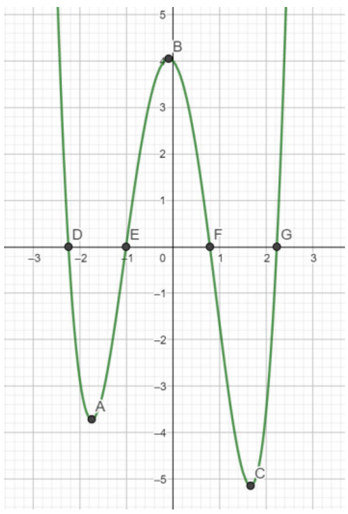
(d) (1) $g^{-1}(x)$ の表示式を書き下し, 定義域を定めよ.

(2) 不等式 $(f^{-1} \circ g)(x) < 1$ を解け.［8］

アメリカの高校生に出された、大学受験のテストです。日本との違いを考えさせられませんか？

極点 A(−1.74,−3.71) B(−0.09,4.04) C(1.67,−5.14)

x 軸の交点 D(−2.24,0) E(−1,0) F(0.8,0) G(2.24,0)



$x^4 + 0.2x^3 - 5.8x^2 - x + 4 \to y1(x)$

solve(y1(x)=0,x)　x=2.236 or x=.8 or x=−1 or x=−2.236

factor(y1(x))　(x−2.236)(x−.8)(x+1)(x+2.236)

solve(D(y1(x),x)=0,x)　x=1.672 or x=−.0086 or x=−1.736

y1(1.672)　−5.1362

y1(−1.736)　−3.7074

solve(y1(x,2)=0,x)　x=.9345 or x=−1.0345

y1(−1.0345)　−1.0734

y1(.9345)　−.24945

f(x)が持つ定義域の範囲

Technology を使うことを前提とした問題が今後出題されるでしょう。　(渡辺信)

第38回検定問題等検討会(2021.1.19)

共通テストと検定問題

何を変えたかったのか

センター試験

・「足切り」（大学の入学試験を3倍以下にする）
・一回の学力検査に頼って合否を決定する
・高等学校教育の程度や範囲を超えたいわゆる難問・奇問の出題
・基礎的な学習の達成程度を問う良質な問題を確保
・受験生の能力・適性を多面的・総合的に評価
・高等学校教育の基礎的な到達度を判定することが可能
・大学の序列化暗記型学習への偏りを招く批判

大学入学センター試験から大学入学共通テストへ

・思考力を重視
・知識だけではない思考力・判断力・表現力
・情報を読みこなす力
・高大接続：高校教育・入学試験。大学教育を改革
・記述式回答は導入されず

数学の問題はどのように変わったか

共通テストとセンター試験の主な違い

共通テスト	センター試験
思考力や判断力などを重視	知識重視に偏り
マークシート式 ※国語・数学で記述式見送り	マークシート式
・資料や文章などの比較増加 ・会話文など日常的・実用的な場面を想定 ・英語リスニングでは一部で読み上げ１回に ※英語民間試験の活用見送り	・英単語や漢字、計算などの基礎問題が恒例 ・大問の数と分野がパターン化 ・リスニングは２回読み上げ

（1）数学における解答方式には変更がなし数学（「簿記・会計」及び「情報関係基礎」を除く）の解答方式は例外的で、一部の問いを除き、問題文中にある「ア」「イウ」といった枠で囲まれた文字に当てはまる数字や符号を直接マークする形式をとっている。誘導形式が多く、解けない問題があると、その先はできないことがある。また、共通一次時代にあったいわゆる「ダミー」はないために、自分で出した数値と問題用紙の桁数が違うとその数値は誤答ということになる。決められた区域内の文字のマークが正解と全て一致しないと得点にはならない。

この方式を継承したことによって記述式回答は今回延期になった。

（2）高大接続：高校教育・入学試験。大学教育を改革

（3）検定問題への影響

（4）記述式になったらば（数学Ｉ・A問題２陸上競技の問題）

問題として何を求めたいのか

途中の計算は結果がわかればよいか(電卓等使用)

現在の問題は情報機器の性能検査

書かれている順序で追いかければ最後の結果がわかる

何も考える必要はない

有効数字について問題

小数点以下何桁まで求めるかは書いてあるが、問題の中に怪しい

問題に数学ソフトを使ったら

1 番　何をするのかわからないので「次元」を考える

2 番　データをグラフ化して見ると直線になることは当然

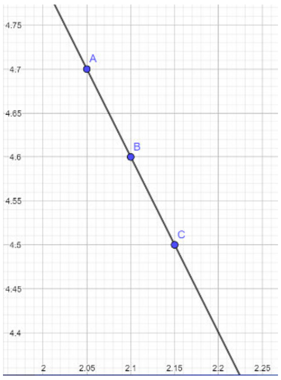
傾きは－2 か—2.00 か

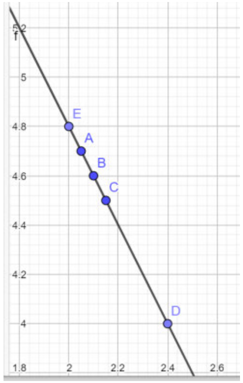
y 切片は何故分数？(後から計算が楽？)

ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50
	A(2.05,4.70)	B(2.10, 4.60)	C(2.15,4.50)

直線の式　0.2x＋0.1y＝8.8…2 の答えもわかる

最大の値を入れると点 C,D 範囲





x の範囲 2.00≦x≦2.40・・・3 の答え(有効数字を考えれば、- 2 ではなく—2.00？)

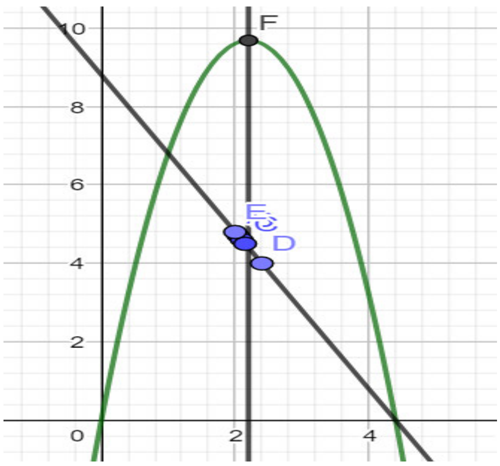
なぜ、小数点以下 2 桁か

y =(-2x＋44/5)・x の最大値を求める

z =-2x＋44/5

2 次関数の最大　9.68

速度が最も早い　100/9.68=10.330…



問題に書かれている通りに数式ソフトを使ったら答えが出てきた。

ボタンを押していれば何をやっているかわからなくても答えが求まる。　　(渡辺信)

第 39 回検定問題等検討会(2021. 2. 16)

共通テスト問題作成の良さ

1.　学習指導要領の改正に合わせて—数学的活動・高大接続・統計問題－

　今回の学習指導要領の改正は数学活動が重要になる。この動きは今回数学Ⅰ・A で出題された「短距離走」に見られる。日常的な問題を数学で処理することの問題作成は難しい。数学モデルを作りことから日常の問題を数学にすることは困難である。いままでの数学問題とは異なり数学モデルを作ることから始まる。今回の問題では速度を求める問題であったが、ピッチの定義に速度測定を利用していたことは問題作成としてはおかしいかもしれないが、今後このような問題を作る必要がある。高大接続としてセンター試験では知識偏重になったといわれている。高校の授業と大学の数学に対する考え方を変える必要は、短距離走を問題にすることによって、数学はいろいろな場面で役立つことを高校生に意識させることができた可能性がある。この改革は数学１・A に今後現れるであろう。数学がいろいろな場面で用いられることによって大学でどの学科に進んでも数学は必要という感覚を持たせることができる。現在数学検定協会の特有問題をもっと数学活動に近づける必要があるがこのような出題はもっと理解されるであろう、統計問題は今後共通テストでも変化するであろう。既にデータ処理されているもの、データの個数が少ないものは問題にはならない。例えば日本人の高校生の身長に注目し、その平均と標準偏差を用いて 95%の範囲から予測することもできるが、50　万人の採点は問題作成のネックになる。共通テストではこの採点のネックが問題作成の壁になる。検定問題では数学的用語の理解に役立つ。

2.　共通テスト問題作成は良い

　個々の問題を見るともし「記述式」になったらば問題の視点は良い。しかしその問題の解法の出題の仕方が難しかったのではないか。答えは必ず一つに決まっても、その問題の解き方を決めておかなくては 50 万人の採点を短期間に終わらせることは大変である。せっかく問題の視点は良いにもかかわらず、答えのマークシート化することによって誘導する解答になってしまう。この部分点をそろえる必要性が共通テストの誘導方式になっている。解法を記述式にしたら採点はできないが、今回の問題作成は興味深い。この問題作成について数学検定協会は学ぶことは多いのではないか。

3.　共通テストの問題点

問題が長すぎる。問題文が長すぎるということは不必要なことを含んでいる。読解力を強調する面があるが、数学の問題としては条件と結論がきちんと述べられていることが必要ではなかろうか。長い問題は部分点をきちんと決めるために起こった現象であり、読解力とは違うのではなかろうか。問題を長くすることは考え方を統一し、部分点がきちんと決められ

なくてはならない。部分点が１点刻みであるなど細かすぎるために問題が長くなった。次にやるべきことは問題の部分的なことで分かる。数学Ｉ・A は問題は二題選択であったが必答問題二題が２つに分かれているので６題３５問を７０分で答えなくてはならない。「思考力」を問う問題ではなかった。

4. 思考力を問う問題への変化は可能か

記述式での問題解答の訓練は共通テストに役立つ。しかし採点の問題は共通テストにとって大きなネックになる。「思考力」を問うことはできないのではないか。　　　（渡辺信）

第40回検定問題等検討会(2021. 3. 16)

共通テスト問題作成の意味

1.　共通テスト問題作成の意味

センター試験から共通テストへの変更はなぜ行われたのか、変更すべき理由がないのであればセンター試験の手直しで済んだ。「記述式」という言葉によって変更の理由が隠れてしまったのではないか。「記述式」を改めた昨年12月には問題ができていたと考えてよい。記述式になっていた問題の一部を急遽改めたのが今回の共通テストであれば初めに掲げられた問題作成の趣旨は変わっていない。何が問題点なのかを前回は学習指導要領から眺めた。今回は直接共通テストの問題に眺めたい。

2.　センター試験から共通テストへの問題点

共通一次試験以降、僅かな点差を競うので、目つきの悪い変な学生が増えた。

・単純な思考の学生が増え、良いか悪いかの二元論で、物事を考えるようになった。
・英語の試験では、前置詞を選ぶ問題で例えば at が正解であっても with でも意味は通じる。on では意味が通じないような設問では、at に3点、with に1点、on は0点とすべきだ。正しい答えが1つだと思う学生が増えた。
・単純な出題では決められた攻略法・暗記になっている。
・学んだ知識は使える知識になっていない。「考えてみてごらん」と言うと、「何だったっけ？」と、一生懸命に思い出そうとするだけである。
・正解が1つに定まらないと不安になるようだ。
・題意をつかめない学生も増え、日本語力の低下を憂えるばかりである。
・大学の序列が明確になった。

3.　高大接続による授業改善

高校の授業の在り方と大学を試験の意味を変えることによって一斉に改革しようとしたのが「高大接続」であった。この問題と知識重視の両方を一度に改革したいと考えたのが今回の改革であった。この改革の趣旨を重視して数学の試験問題を見たときに、今回の共通テストが持つ意味が分かる。

数学の問題は誘導式であって思考力を試すことができない。思考力を求めるのではなく数学という学問の見方を変えた。知識・定理（問題解決）の重視から問題発見の方法の在り方提示になった。

この違いを数学Ⅰ・Aに見たい。

問題解決（センター試験） 正12面体の中に立方体が内在することを示せ。証明問題

発見学習（共通テスト） いかにしたら正 12 面体の中に立方体があることを探そう。(数学的活動・数理的思考)

4. 検定問題への影響

今回の共通テストは読解力が問われたと思いがちである。文章が長く設問が多いことから、読んですぐに答えることができなくてはならない。しかしこの問題はあまり中心的ではなく、数学問題の作成の意味が変化した。今までの数学検定問題では対処できない。またGIGA スクール問題ではプログラミングが中心になる。現在のプログラミングが論理的思考の学習ではなく、やりたいことをやる方式であると発見学習になる。発見学習の方法を問う問題をいかにして検定に入れるか問われている。 （渡辺信）

編集後記

学習数学研究紀要第 3 巻は、新型コロナウィルス感染症（COVID-19）の拡大により発行を延期して、第 3 巻・第 4 巻を合併号とすることとし、ここに漸く発行することができました。

この 2 年間の新たな活動を振り返って見ますと、2020 年 1 月に「記述式」について学習数学研究所の見解を公表しました。2019 年および 2020 年の 9 月と 11 月に、免許状更新講習を開講しました。2020 年には、新型コロナウィルス感染症の予防対策として、急遽対面型の講習から希望者はオンライン型で受講できる体制を整えました。2020 年 6 月、北海道の釧路市立鳥取小学校と「地域協働学力向上プログラム事業に関する包括連携協定書」を締結し、算数・数学の学力向上に関する研究を開始しました。また、数学検定・算数検定に関する詳細な調査ができる体制も整えました。

このように、この 2 年間で学習数学研究所の事業は、徐々にではありますが充実してきました。これからも算数・数学教育に関する事業を拡充し、社会に情報発信してまいりますので、宜しくお願いいたします。（松本　精一）

学習数学研究紀要　第３巻・第４巻

発行日　2021 年 3 月 31 日

編集発行　公益財団法人 日本数学検定協会
学習数学研究所
所長　清水　静海

〒110-0005　東京都台東区上野 5-1-1
TEL　03-5812-8340
FAX　03-5812-8346

印刷所　サイトー印刷　株式会社