

# 気象予測を支える数学

## —地球大気の基本的な運動方程式—

(公財)日本数学検定協会  
学習数学研究所  
中村 力

### 要約

流体である大気は、我々が地球上で観測しているものであるが、基本的な大気の運動、すなわち運動方程式から風のパターンが分類でき、それぞれに数理的特徴が存在する。

地球大気の運動は流体力学のナビエ・ストークスの方程式が支配しており、地球というその回転座標系における運動方程式を解析することで大気の状態や変化を把握し、将来の気象状態を予測できるようになる。

本稿は、得られた大気の運動方程式から地上天気図に現れる基本的な大気の運動、すなわちさまざまな地球大気の運動(風のパターン)を紹介する。

キーワード：流体力学、ナビエ・ストークスの方程式、コリオリ力

### 1. ナビエ・ストークスの方程式

流体の運動を記述するナビエ・ストークスの方程式は、時刻 $t$ における任意の位置 $(x, y, z)$ における流体の速度ベクトル $\mathbf{v}=(u, v, w)$ の時間的变化を

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = K - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表す。①はすなわち、地球大気の運動方程式である。

ここで、 $\rho$ は流体の密度、 $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 、 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 、 $p$ は圧力、 $\mu$ は粘性係数、 $K$ は単位質量に作用する外力である。

上式の左辺は、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ と表記して

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = K - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表すこともある。

## 2. 空気塊の移動と温度変化

前節で、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  としたが、わかりやすい例として速度  $\mathbf{v}$  の代わりに温度  $T$  で考え

てみる。図1で示すように移動する空気塊の温度  $T$  の変化を

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{DT}{Dt} \quad \dots \textcircled{3}$$

と表し、式③における左辺と右辺の数式の考え方の違いを図1で説明する。

ある時刻  $t$  位置  $(x, y, z)$  にあった空気塊の温度は  $T$  として、短い時間  $\Delta t$  の間に  $(x, y, z, t)$  から  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$  に移動して、温度が  $T + \Delta T$  へ変化したとする。

温度の変化量は

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z$$

上式の両辺を  $\Delta t$  で割って

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$\Delta t \rightarrow 0$  では、 $u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 、 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 、 $w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$  より

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

上式の左辺  $\frac{dT}{dt}$  は  $\frac{DT}{Dt}$  と表記することもあり、これは空気塊の運動を追跡しながら測定した温度変化であり、全微分、実質的变化（ラグランジュ的变化）ともいう。一方、右辺はオイラー的变化で、任意の時刻  $t$  ごとに各点  $(x, y, z)$  の風速  $\mathbf{v}$  や温度  $T$  の測定を行って変化を見渡すアプローチである。

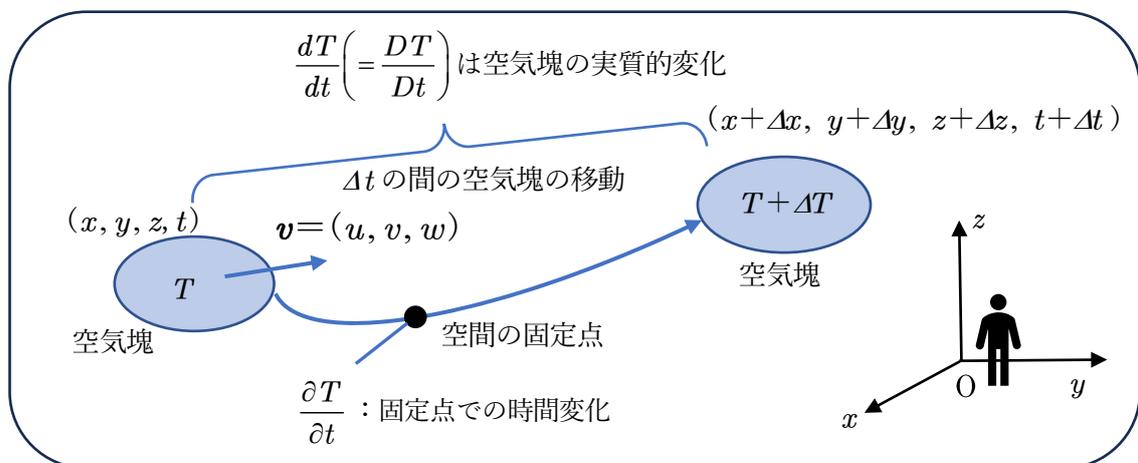


図1：空気塊の運動

### 3. 地球大気の運動方程式

地球上の緯度  $\varphi$  において回転角速度ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}=(0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$  で自転している場合、地球大気の運動方程式には見かけの力であるコリオリ力  $2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$  が現れる (図2)。

また地球大気では、ナビエ・ストークスの方程式①の右辺第1項の外力  $\mathbf{K}$  と右辺第3項にある粘性項を無視して

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \dots \textcircled{4}$$

と表すことができる。

地球上の緯度  $\varphi$  において東方向に  $x$  軸、北方向に  $y$  軸、天頂方向に  $z$  軸をとったときに、大気の流れ速度ベクトル  $\boldsymbol{v}=(u, v, w)$  における  $x$  軸方向、 $y$  軸方向の風速  $u, v$  は、鉛直速度  $w$  は  $u, v$  に比べて小さく無視できる。また  $x$  軸方向、 $y$  軸方向の気圧傾度力をそれぞれ

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$  とすると、④より

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \textcircled{5}, \quad \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots \textcircled{6}$$

ここで、 $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$  はオイラーの加速度で以下のように求める。

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

すなわち、空間座標  $x, y, z$  と時間  $t$  を独立変数として扱う手法である。

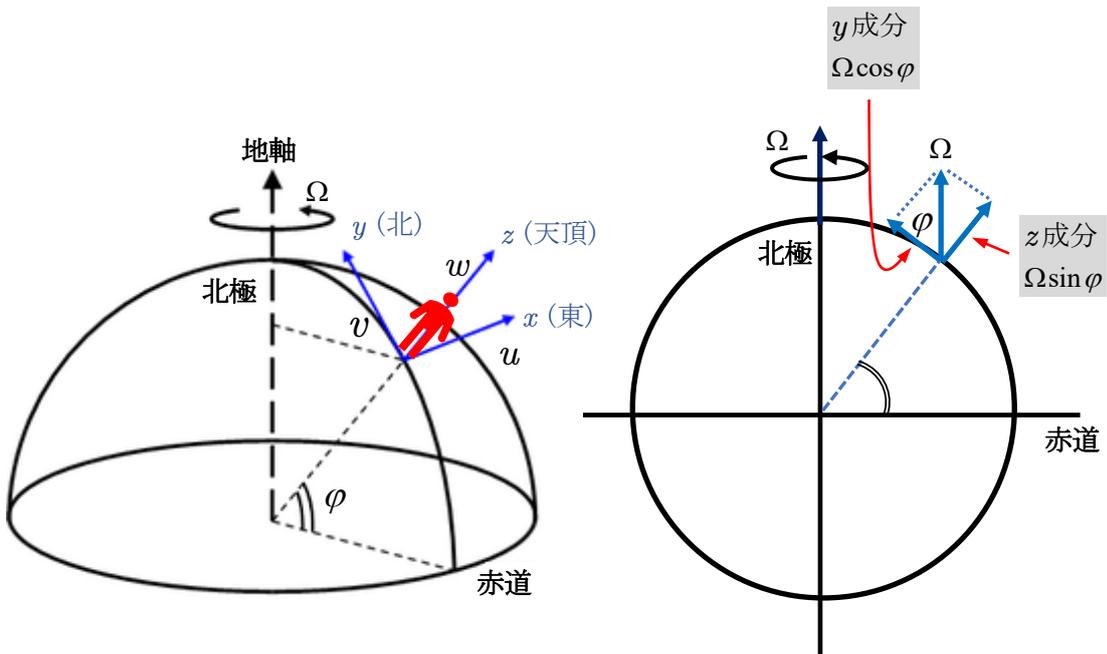


図2：地球上の緯度  $\varphi$  における運動方程式の座標系

なお、コリオリ力  $2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$  はベクトルの外積で

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} &= 2(0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi) \times (u, v, 0) \\ &= (-2\Omega \sin \varphi \times v, 2\Omega \sin \varphi \times u, -2\Omega \cos \varphi \times u) \\ &= (-fv, fu, -\bar{f}u) \end{aligned}$$

と計算できる(ただし、 $f=2\Omega \sin \varphi$ ,  $\bar{f}=2\Omega \cos \varphi$ )。

コリオリ力は水平風速ベクトル  $\boldsymbol{v}=(u, v, 0)$  と回転角速度ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}$  に垂直で、北半球では  $\boldsymbol{v}$  の右方向に作用する。

#### 4. 地衡風

等圧線が直線で、水平風速の加速度項  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$  を無視できるので、⑤、⑥はそれぞれ以下の式になる。

$$fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \textcircled{7} \quad fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots \textcircled{8}$$

すなわち、上式はコリオリ力と気圧傾度力が釣り合っている状態を表しており、高層天気図での地衡風に相当する。

図3のような気圧パターン  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} < 0$  の場合を考えると、⑦、⑧はそれぞれ

$$v = 0, u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} > 0 \quad \dots \textcircled{9}$$

となって、地衡風  $u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$  と等しくなるため、地衡風の大きさはすなわち、気圧傾度力を

コリオリ因数  $f$  で割った値になる。

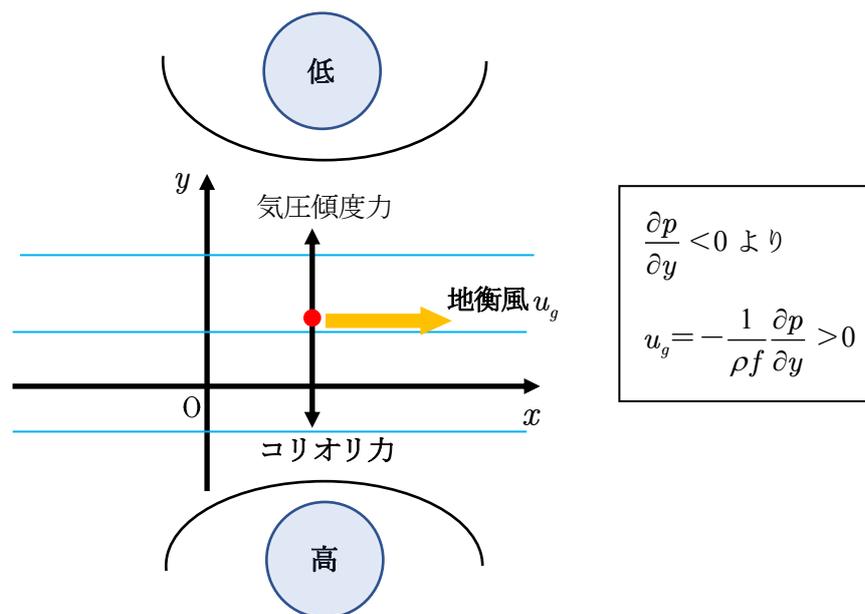


図3：地衡風の模式図

## 5. 問題提起(対策案)

ここで式⑤、⑥から⑨の導出について問題を提起する。地衡風を求めるとき、⑤、⑥の加速度項  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$  を無視したが、これを残したままで計算してみる。

気圧傾度力  $G_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $G_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$  とすると、式⑤、⑥はそれぞれ下の式⑩、⑪になる。

$$\frac{du}{dt} - fv = G_x \quad \dots \text{⑩} \quad \frac{dv}{dt} + fu = G_y \quad \dots \text{⑪}$$

ここで前と同様に  $W = u + iv$  ( $i = \sqrt{-1}$ )、 $G = G_x + iG_y$  とおくと、⑩+⑪より

$$\frac{dW}{dt} + i f W = G \quad \dots \text{⑫}$$

⑫は  $W$  に関する1階微分方程式で、初期条件  $t = 0$  のとき  $W = W_0 (= u_0 + iv_0)$  として

$$W = \frac{G}{if} + \left( W_0 - \frac{G}{if} \right) e^{-ift} \quad \dots \text{⑬}$$

の解が得られる。

図2の場合を考えると、 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  より、 $G_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

また  $u_0 = 0$  なので、⑫で  $W = u + iv$  より、 $u, v$  についてそれぞれ表すと

$$u = v_g + v_0 \sin ft - \frac{G_y}{f} \cos ft, \quad v = u_g \sin ft + v_0 \cos ft \quad \dots \text{⑭}$$

なお、地衡風は

$$u_g = \frac{G_y}{f} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

である。

図2では、 $u = v_g$  (地衡風)、 $v = 0$  となるはずであるが、⑭はそうはなっていない。

⑭の2つの式は、 $W = u + iv$  で1つの式にまとめると

$$W (= u + iv) = u_g + r e^{i(\varepsilon - ft)} \quad \dots \text{⑮}$$

$$\left( \text{ただし、} r = \sqrt{u_g^2 + v_0^2}, u_g = \frac{G_y}{f}, \tan \varepsilon = -\frac{v_0}{u_g} \right)$$

⑮の右辺の第2項  $r e^{i(\varepsilon - ft)}$  が  $t \rightarrow \infty$  で0に収束すればよいが、この  $r e^{i(\varepsilon - ft)}$  は

$$r e^{i(\varepsilon - ft)} = r \{ \cos(\varepsilon - ft) + i \sin(\varepsilon - ft) \}$$

より、慣性振動という振動する成分が含まれているので、いくら時間  $t$  が経っても、 $u \rightarrow u_g$ 、 $v \rightarrow 0$  という地衡風にはならない(図4)。

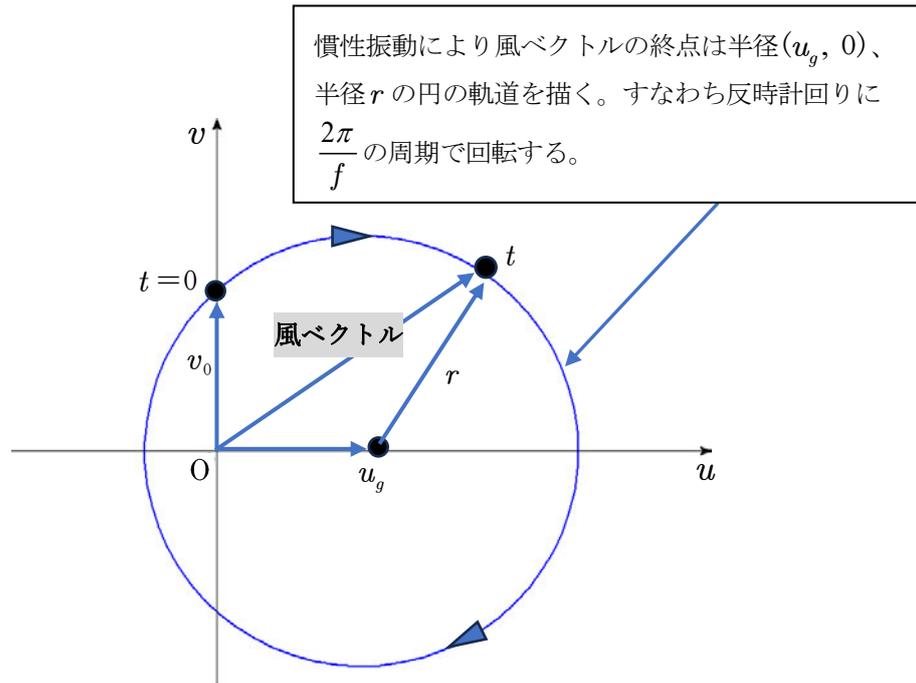


図4：慣性振動の模式図

これは⑤、⑥から図2より加速度項  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$  を無視して⑦、⑧を用いた飛躍が問題であろう。

そこで、加速度項を残し、⑤、⑥に速度に比例する摩擦力(定数  $\gamma > 0$ )を付加してみる。

$$\frac{du}{dt} - fv = G_x - \gamma u \quad \dots(16) \quad , \quad \frac{dv}{dt} + fu = G_y - \gamma v \quad \dots(17)$$

これも前と同様に  $W = u + iv$  ( $i = \sqrt{-1}$ )、 $G = G_x + iG_y$  を導入すると⑬、⑭は

$$\frac{dW}{dt} + (if + \gamma)W = G \quad \dots(18)$$

⑬は  $W$  の1階微分方程式で、初期条件  $t=0$  で  $W = W_0 (= u + iv_0)$  の解を求めると

$$W = \frac{G}{if + \gamma} + \left( W_0 - \frac{G}{if + \gamma} \right) e^{-(if + \gamma)t} \quad \dots(19)$$

$t \rightarrow \infty$  のとき、⑬は

$$W = \frac{G}{if + \gamma} = \frac{\gamma G_x + fG_y + i(\gamma G_y - fG_x)}{f^2 + \gamma^2} = u + iv$$

より、 $x$  方向の気圧傾度  $G_x \rightarrow 0$ 、摩擦力  $\gamma \rightarrow 0$  とすると

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\gamma G_x + fG_y}{f^2 + \gamma^2} \rightarrow \frac{fG_y}{f^2} = \frac{G_y}{f} = u_g \\ v &= \frac{\gamma G_y - fG_x}{f^2 + \gamma^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \dots(20)$$

となって、弱いながらも摩擦力を導入することで振動する成分はなくなって、⑳のように地衡風  $u_g$  に収束する。

## 6. 傾度風

発達した熱帯低気圧や台風の場合、空気の流れは地衡風のような直線的ではなく円形(カーブ)をえがくため、図5のような円筒座標系の運動方程式を考えなければならない。

この場合、加速度を考慮して

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - f v_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \dots(21)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_\theta v_r}{r} + f v_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots(22)$$

から考え始めることにする。

いま、等圧線が円形  $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0\right)$  で、かつ加速度がない  $\left(\frac{Dv_r}{Dt} = \frac{Dv_\theta}{Dt} = 0\right)$  と仮定すると、②の

左辺は、 $\frac{v_\theta v_r}{r} + f v_r = v_r \left(\frac{v_\theta}{r} + f\right) = 0$  となって、 $v_r = 0$ 、 $v_\theta = -fr$  が得られる。

後者の  $v_\theta = -fr$  を①に代入すると  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$  となるが、等圧線が円形の状態  $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0\right)$  で、

さらに  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$  では現実的ではないので、 $v_\theta = -fr$  は考えずに  $v_r = 0$  のみを採用する。

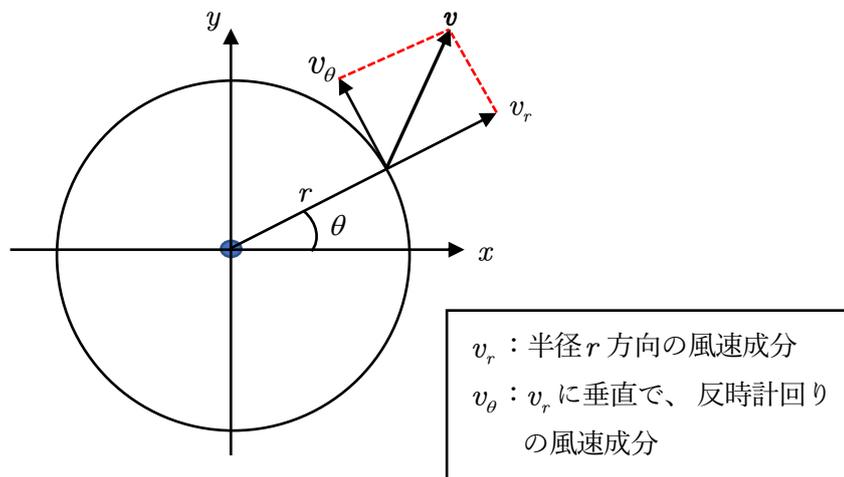


図5：傾度風の座標系

結局は②より

$$\frac{v_\theta^2}{r} + f v_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \dots(23)$$

が得られる。③は気圧傾度力  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$  が遠心力  $\frac{v_\theta^2}{r}$  とコリオリ力  $fv_\theta$  の和とがつり合っている式で、これを満たす  $v_\theta$  を傾度風という。

気圧傾度力が正  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} > 0\right)$  のときを低気圧域、負  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} < 0\right)$  のときを高気圧域といい、それぞれにおける傾度風  $v_\theta$  の向きと力のバランスを図6に示す。

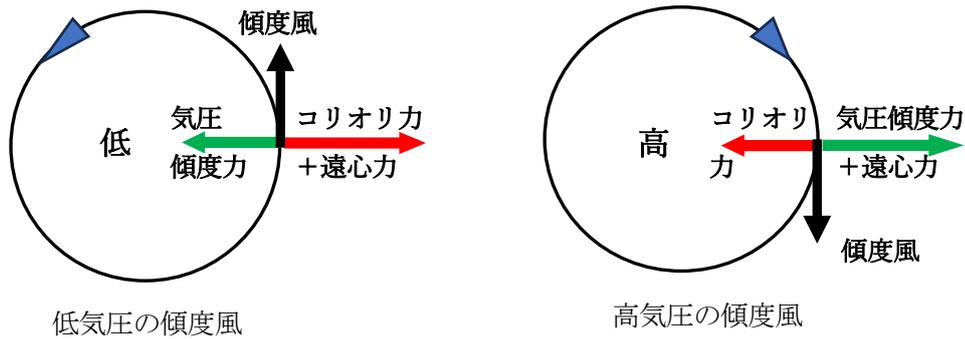


図6：高気圧と低気圧における傾度風の模式図

式③を変形して

$$v_\theta^2 + frv_\theta - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \dots(24)$$

②を  $v_\theta$  に関する2次方程式とみなして解くと

$$v_\theta = \frac{-fr \pm \sqrt{(fr)^2 + \frac{4r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}}{2} = \frac{fr}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{f^2 r} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \right)$$

となって、コリオリ因数  $f = 2\Omega \sin \varphi$ 、気圧傾度力  $G_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$  として  $v_\theta$  を表すと

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{2\Omega r \sin \varphi}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4G_r}{(2\Omega \sin \varphi)^2 r}} \right) \\ &= r\Omega \sin \varphi \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \varphi}} \right) \quad \dots(25) \end{aligned}$$

②の根号内を展開すると

$$\begin{aligned} v_\theta &= r\Omega \sin \varphi \left[ -1 \pm \left\{ \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \varphi} + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \varphi} \right)^2 + \dots \right\} \right] \\ &= r\Omega \sin \varphi \left\{ -1 \pm \left( 1 + \frac{G_r}{2\Omega^2 r \sin^2 \varphi} - \frac{1}{8} \frac{G_r^2}{\Omega^4 r^2 \sin^4 \varphi} + \dots \right) \right\} \quad \dots(26) \end{aligned}$$

気圧傾度力  $G_r$  を一定にして、 $r \rightarrow \infty$  で、 $v_\theta$  が地衡風(すなわち気圧傾度力  $G_r$  をコリオリ因数  $f$  で割った値)になる条件を課すると②⑥で負の符号は適さず、正の符号で実際に( )内の第2項までとると

$$v_\theta = r\Omega \sin \phi \left( \cancel{-1} + 1 + \frac{G_r}{2\Omega^2 r \sin^2 \phi} \right) = r\Omega \sin \phi \cdot \frac{G_r}{2\Omega^2 r \sin^2 \phi} = \frac{G_r}{2\Omega \sin \phi} \left( = \frac{G_r}{f} \right)$$

が確認できる。

すなわち、傾度風  $v_\theta$  は②⑤において正の符号をとった

$$v_\theta = r\Omega \sin \phi \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \phi}} \right) \dots \text{②⑦}$$

で与えられる。

図7は一定の  $r$  に対し、傾度風  $v_\theta$  と気圧傾度力  $G_r$  の関係を表したものである。低気圧では、 $G_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} > 0$  より、②⑦の根号内は常に正なので  $G_r$  の増加(i. e. 低気圧の発達)とともに、 $v_\theta$  は正の値の範囲(時計まわり)で限りなく増加する(すなわち強風・暴風が吹く)ことがわかる。

一方、高気圧では、 $G_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} < 0$  なので、②⑦の根号内は負になって  $v_\theta$  は複素数になる可能性もあるが、現実にかかる現象は

$$1 + \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \phi} \geq 0 \text{ より、 } G_r \geq -\Omega^2 r \sin^2 \phi \text{ (}<0\text{)}$$

である。

すなわち、高気圧では気圧傾度力  $G_r$  の最大値  $-\Omega^2 r \sin^2 \phi$  のとき最大傾度風は

$$v_\theta = -r\Omega \sin \phi < 0 \text{ (時計まわり)}$$

となって、風速は上限をもつことがわかる。低気圧では風速の上限がなかったのとは対照的である。

また、地衡風は  $G_r$  をコリオリ因数  $f$  で割った値で、 $G_r$  の変化に対して  $G_r = 0$  を通って傾き  $\frac{1}{f}$  の直線となる。実際に②⑦より傾度風  $v_\theta$  の  $G_r = 0$  における傾きを求めると

$$\frac{dv_\theta}{dG_r} = r\Omega \sin \phi \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{G_r}{\Omega^2 r \sin^2 \phi}}}$$

より

$$\left( \frac{dv_\theta}{dG_r} \right)_{G_r=0} = r\Omega \sin \phi \cdot \frac{1}{2\Omega^2 r \sin^2 \phi} = \frac{1}{2\Omega \sin \phi} = \frac{1}{f}$$

となつて、 $G_r = 0$  で地衡風は傾度風に接することも図7より確認できる。

さらに、図7より低気圧内では(地衡風) > (傾度風)であるが、高気圧では逆に(地衡風) < (傾度風)になることがいえる。

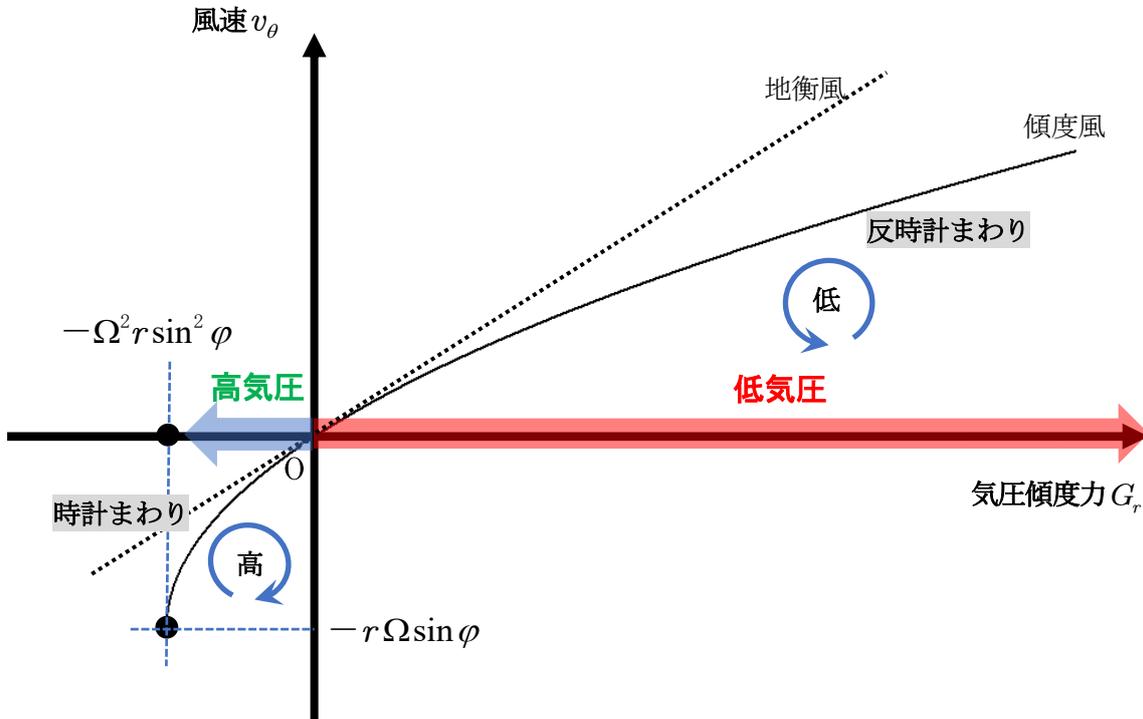


図7：傾度風と気圧傾度力と関係

## 7. 旋衡風

竜巻や台風を中心付近は、②において半径  $r$  が十分小さいか、 $v_\theta$  が十分大きい場合に相当し、②の左辺の第2項は第1項に比べて無視できるので

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \dots(27)$$

すなわち、気圧傾度力と遠心力が釣り合っている状態で、 $\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} > 0$  より、 $v_\theta$  の正負にかかわらず中心付近は低気圧になっている。

## 8. 結論

本稿は大気運動方程式から地上天気図に現れる基本的な大気運動、風のパターンを数理的に紹介した。このような風の運動方程式のほかに、熱力学の式、連続の式、降水過程などのパラメータを総合的に組み合わせて、今日の気象現象の数値予測の技術的・実用的なインフラが開発・整備されてきた。

気象現象を記述する微分方程式を数学的基礎理論で解き、短時間で気圧、気温、風速、降水量などの気象要素を予測するスーパーコンピュータの最新テクノロジーに対して改めて驚嘆と同時に畏敬の念を覚える。

<補足> 1階微分方程式⑱から解⑲の求め方

$y(x)$ に関する1階微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \quad (C : \text{定数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

定数 $C$ は、初期条件より求めることができる。

⑱の $\frac{dW}{dt} + (if + \gamma)W = G$ を上式を活用して $W$ を求める。

$$\begin{aligned} W &= e^{-(if+\gamma)t} \left( \int e^{(if+\gamma)t} G dt + c \right) \quad (c : \text{定数}) \\ &= e^{-(if+\gamma)t} \left( G \frac{e^{(if+\gamma)t}}{if+\gamma} + C \right) \quad (C : \text{定数}) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ただし、 $if + \gamma$ ,  $G = G_x + iG_y$ は定数と考える。

初期条件 $t = 0$ で $W = W_0 (= u + iv_0)$ で解を求めると、②より

$$W_0 = \frac{G}{if+\gamma} + C \text{ より、} C = W_0 - \frac{G}{if+\gamma} \text{ を②に代入すると}$$

$$W = \frac{G}{if+\gamma} + \left( W_0 - \frac{G}{if+\gamma} \right) e^{-(if+\gamma)t} \quad \dots \textcircled{19} \quad (\text{既出})$$

が得られる。

#### 参考文献

- [1] 正野重方『気象学総論』 地人書館 (1958)
- [2] 正野重方『気象力学』 岩波全書 (1960)
- [3] 小倉義光『一般気象学 第2版補訂版』 東京大学出版会 (2016)
- [4] 小倉義光『総観気象学入門』 東京大学出版会 (2000)
- [5] 二宮洸三『気象がわかる数式入門』 オーム社 (2006)
- [6] 今井功『流体力学』 岩波書店 (1970)
- [7] 中川和道 他『環境物理学』 裳華房 (2004)