

小学校段階における図形の面積に関する考察

学習数学研究所

穂積 悠樹

概要

実用数学技能検定（数検）の7級と6級では、小学校第5学年(以下、小5と表記する)で学習する三角形や四角形の面積を求める問題が出題されることがある。四角形の種類は、具体的に『平行四辺形』、『台形』、『ひし形』の3種類である。これらの問題において、出題の仕方がどのように変わると難易度はどう変化するか等、問題の条件設定が変わることによる影響を調べた。

本稿では、第206回(2011.4.10)～第405回(2023.3.4)で出題した11年分の問題を調査対象としている。ただし、すべての検定回にこれらの図形の面積が出題されているわけではないことはご留意いただきたい。

キーワード：「正解値」、「理解度」、「ベーシック問題」

1. 数検と受検者層、その他注意点

- ・数検7級では小4と小5の範囲が、数検6級では小5と小6の範囲が出題されるが、誰でも受検できる。ただし時期にもよるが、7級では受検者の約55%の小5、約30%が小6であり、6級では受検者の約57%が小6である。
- ・数検の受検者は、算数・数学が好きな人や得意な人が多い。そのため、学力調査などと比較すると、正解率は高めである。
- ・数検は記述式の検定であるが、7級と6級の解答方法の多くは、答えだけを書く短答式(途中式は不要)である。本調査では、短答式と論述式との差を無くすために、短答式の問題のみの調査を行うものとする。
- ・問題文に単位を書くよう指示のある問題について、指示のなかった問題との差を無くすために、本調査では単位の正誤を不問とし、数値のみ正しいものを「正解値」と名付け、正解値の個数を受検者数で割った割合を「理解度」と名付けることとする。

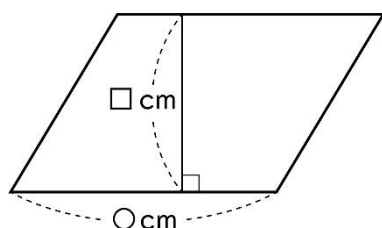
2. 「ベーシック問題」とその理解度

三角形や四角形の面積を求める問題にもさまざまな出題の仕方があり、単純に図形の種類だけで分けるわけにはいかない。そこで各図形において、面積を求めるにあたって必要最低限の情報のみを与えたもっとも簡素化された問題を「ベーシック問題」と呼ぶことにし、まずはその「ベーシック問題」の理解度を調べることから始めた。

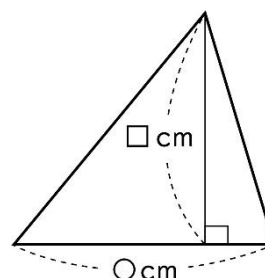
ベーシック問題とは、平行四辺形と三角形であれば「底辺」と「高さ」の情報のみ、台形であれば「上底」と「下底」および「高さ」の情報のみ、ひし形であれば「2つの対角線の長さ」の情報のみとする。

■「ベーシック問題」の図

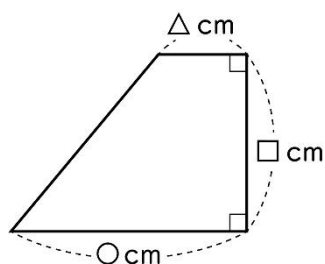
①平行四辺形



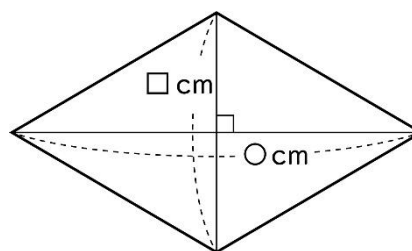
②三角形



③台形



④ひし形



これら①～④の図形において、○や□に入るのが20以下の整数であれば、どの整数が入っても理解度はほとんど変わらないことが分かっている。ここで、20以下の整数のみが使われている問題に限定して、7級を受検した小5と6級を受検した小6について、正解値と理解度を算出したところ、次のようになった。なお、この集計結果は、第206回(2011.4.10)検定以降に出題した「ベーシック問題」のうち、調査可能だった検定回に限定したものであり、その問題を解いた受検者数を学年別にまとめたものである。小5については、これらの図形の面積を学習するであろう11～12月の前後に分けて集計した。

■7級受検者の理解度

・小5前期(4～10月)

「ベーシック問題」の図形別理解度

図形の種類	①平行四辺形	②三角形	③台形	④ひし形
受検者数(人)	2761	1705	299	156
正解値(個)	2247	1135	149	70
理解度	81.4%	66.6%	49.8%	44.9%

・小5後期(1～3月)

「ベーシック問題」の図形別理解度

図形の種類	㊐平行四辺形	㊑三角形	㊒台形	㊓ひし形
受検者数(人)	7027	2045	3134	494
正解値(個)	6696	1789	2321	348
理解度	95.3%	87.5%	74.1%	70.4%

・小6

「ベーシック問題」の図形別理解度

図形の種類	㊐平行四辺形	㊑三角形	㊒台形	㊓ひし形
受検者数(人)	2727	2101	1127	297
正解値(個)	2601	1869	908	209
理解度	95.0%	89.0%	80.6%	70.4%

これらの表からわかることは、次のi)～iii)の3点である。

- i) 3つの表に共通することとして、「㊐平行四辺形」の理解度がもっとも高く、次いで「㊑三角形」、「㊒台形」、「㊓ひし形」の順に理解度が低くなっている。
- ii) 小5後期(1～3月)と小6の理解度を比較すると、「㊒台形」だけ6ポイント以上差が開いているものの、ほかの図形はひじょうに近い値をとっている。
- iii) 小5前期(4～10月)と小5後期(1～3月)の理解度を比較すると、「㊐平行四辺形」は約14ポイント差が開いていて、「㊑三角形」、「㊒台形」、「㊓ひし形」はいずれも20ポイント以上差が開いている。

iii)から、㊐～㊓の図形の面積の求め方を学習する前と後では、理解度にかかなりの差があることがわかる。それに比べ、ii)からは、学年は違えども理解度はかなり近い値をとっており、これらは既習者という枠で括ることとする。小5後期(1～3月)と小6の理解度を合わせると、次の表のようになる。

なお、7級に関しては下の表をもとに論じていくことにし、「小5後期(1～3月)」を「小5(3学期)」と表記する。

・小5(3学期)&小6

「ベーシック問題」の図形別理解度

図形の種類	㊐平行四辺形	㊑三角形	㊒台形	㊓ひし形
受検者数(人)	9764	4146	4261	791
正解値(個)	9297	3658	3229	557
理解度	95.2%	88.2%	75.8%	70.4%

この小5(3学期)と小6の結果を合わせた理解度から、7級を受検した既習者のうち「㊸平行四辺形」は約95%が、「㊹三角形」は約90%が、「㊺台形」は約75%が、「㊻ひし形」は約70%が面積の求め方を理解していると思われるかもしれない。しかし、実際に求め方を理解しているのは、この割合よりも低いことがわかっている。それを第3節で説明する。

■ 6級受検者の理解度

6級においても、これら図形の面積の問題は出題されている。そこで、6級を受検した小6の結果をまとめたところ、下の表のようになった。

・小6

「ベーシック問題」の図形別理解度

図形の種類	㊸平行四辺形	㊹三角形	㊺台形	㊻ひし形
受検者数(人)	12931	3783	7331	3879
正解値(個)	12549	3631	6678	3435
理解度	97.0%	96.0%	91.1%	88.6%

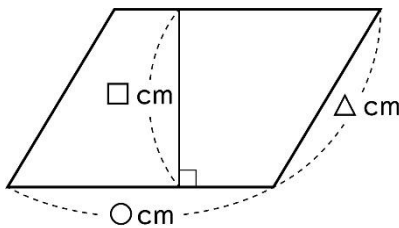
6級を受検した小6もこれまでと同様に、㊸平行四辺形の理解度が高く、次いで㊹三角形、㊺台形、㊻ひし形の順に理解度が低くなっていることがわかる。ただし、6級を受検した小6の理解度は、どの図形の問題も理解度がかなり高くなっており、6級を受検した小6の結果を分析する意味はほとんどないため、これらの図形の面積の理解度に関しては、7級受検者の結果で論ずることにする。

3. 「ベーシック+1辺」とその理解度

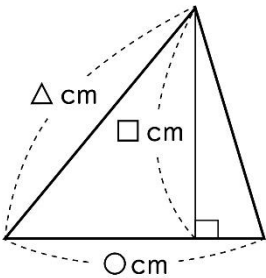
「ベーシック問題」は、面積を求めるにあたって必要最低限の情報のみを与えた問題のことであったが、それに加え、面積を求めるにあたって不要な1辺の長さを与えた問題の理解度を調べることにする。これを「ベーシック+1辺」と呼ぶことにする。

■ 「ベーシック+1辺」の例

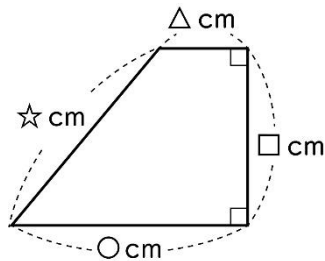
㊸平行四辺形



㊹三角形



◎台形



※ひし形については「ベーシック＋1辺」は出題されていなかった。

■ 7級受検者の理解度

小5(3学期)と小6を合わせた「ベーシック＋1辺」の各図形における理解度は、下の表のとおりである。

・小5後期(3学期)&小6

「ベーシック＋1辺」の図形別理解度

図形の種類	㊐平行四辺形	㊑三角形	◎台形	㊒ひし形
受検者数(人)	1105	119	480	－
正解値(個)	996	95	373	－
理解度	90.1%	79.8%	77.7%	－

前々ページの小5(3学期)&小6の「ベーシック問題」の理解度と比較すると、「㊐平行四辺形」は約5ポイント、「㊑三角形」は約8ポイント下がっていることがわかる。「◎台形」にいたっては、約2ポイント上がっているが、「二群の比率の差の検定」という統計手法を用いると有意水準5%で「棄却されない」と判定される。

このことからベーシック問題の場合、「㊐平行四辺形」と「㊑三角形」にいたっては、面積の求め方を正しく理解していないにもかかわらず正解していた人が10%未満存在していたことになる。「㊒ひし形」にいたっては正確にはわからないものの、求め方を正しく理解していないにもかかわらず正解していた人は約10ポイント存在すると推定される。「◎台形」にいたっては有意水準5%で「棄却されない」と判定されているが、台形は「ベーシック問題」であつても面積を求めるにあたって必要な辺の長さが3種類もあり、かつ公式も複雑であることから、あてずっぽうで正解する人はいないということだろう。

以上のことから、「◎台形」を除く図形に関しては、面積を求めるにあたって必要のない辺の長さも最低1つは与えておくべきであろう。

■長方形と正方形の理解度

話題は少し逸れるが、前ページで述べた「ベーシック問題」をあてずっぽうで正解している人が少なくないということを、別の観点からも説明できる。それは、小4で学習する長方形や正方形の面積と絡めた話であるが、7級を受検した小5および小6に限定して、既習者の理解度を求めたところ、下の表のようになった。なお、正方形にいたっては、正方形であるという条件と1辺の長さを与えるだけで面積は求められるのだが、正方形であるという条件と2辺を与えたときとで理解度に差が出るのがわかっている。そのため、前者は「正方形(1辺)」、後者は「正方形(2辺)」として分けて集計している。

・小5 & 小6

長方形と正方形の図形別理解度

図形の種類	長方形	正方形(1辺)	正方形(2辺)
受検者数(人)	14825	2814	5077
正解値(個)	14440	2640	4820
理解度	97.4%	93.8%	94.9%

この表から、長方形の理解度がもっとも高く、次いで正方形(2辺)、正方形(1辺)の順に低くなっていることがわかる。なお、これら2種類の正方形は、理解度の差は1ポイントに過ぎないが、「二群の比率の差の検定」を用いると、有意水準5%で「棄却される」と判定される。つまり、正方形の面積を求めるにあたっては、1辺の長さだけでなく、2辺の長さを与えたほうが、理解度が高くなるといえるのである。

ここで小5(3学期)&小6の「ベーシック問題」と合わせて理解度を比較すると、下のようになる。なお、これらは理解度の高いほうから降順に並べている。

- ①(小4)長方形 … 97.4%
- ②(小5)平行四辺形 … 95.2%
- ③(小4)正方形(2辺) … 94.9%
- ④(小4)正方形(1辺) … 93.8%
- ⑤(小5)三角形 … 88.2%
- ⑥(小5)台形 … 75.8%
- ⑦(小5)ひし形 … 70.4%

このことから、小5で学習する平行四辺形のほうが、小4で学習する正方形よりも理解度が高いことがわかる。この逆転現象からも、ベーシック問題の場合はあてずっぽうで正解している人が少なくないといえるのである。

4. 受検者の解答状況

ここでは、④平行四辺形、⑤三角形、⑥台形、⑦ひし形の面積を求めるにあたって、どのような解答をしていたのかを紹介する。なお、長方形や正方形における調査では、周の長さを求める間違いが多いことがわかっている。

■「ベーシック問題」の解答状況

小5（3学期）と小6を合わせた「ベーシック問題」の各図形における解答状況は、下の表のとおりである。

④平行四辺形

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square$	9297	95.2%
誤答	$\bigcirc \times \square \div 2$	264	2.7%
	その他誤答	179	1.8%
	無解答	24	0.2%
合計		9764	100.0%

⑤三角形

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2$	3658	88.2%
誤答	$\bigcirc \times \square$	319	7.7%
	その他誤答	156	3.8%
	無解答	13	0.3%
合計		4146	100.0%

⑥台形

解答類型		個数	割合
正解値	$(\bigcirc + \triangle) \times \square \div 2$	3229	75.8%
誤答	$(\bigcirc + \triangle) \times \square$	272	6.4%
	$\bigcirc \times \square (\div 2)$	195	4.6%
	$\bigcirc \times \triangle \times \square (\div 2)$	156	3.7%
	その他誤答	381	8.9%
	無解答	28	0.7%
合計		4261	100.0%

⑦ひし形

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2$	557	70.4%
誤答	$\bigcirc \times \square$	144	18.2%
	その他誤答	79	10.0%
	無解答	11	1.4%
合計		791	100.0%

④平行四辺形では、三角形の面積の公式と混同して2で割ってしまう誤答がもっとも多く見られ、⑤三角形、⑥台形、⑦ひし形では2で割らない誤答がもっとも多く見られた。⑤三角形の面積においては、平行四辺形の面積の公式と混同しているものと思われる。

⑥台形については、他にも底辺×高さ（または底辺×高さ÷2）を計算したような誤答や、3つの長さの積（またはそれを2で割った値）を求めたような誤答もそれなりに多く見られた。前者の誤答は、平行四辺形や三角形の面積と混同しているものと思われる。また後者の誤答は、⑦ひし形にもあてはまるが、面積の求め方がわからず、ただ与えられた辺の長さの積を求めただけだと考えられる。

このように、面積の求め方がわかっていなくても、与えられた辺の長さの積を答えるだけで、平行四辺形の「ベーシック問題」の場合は正解になってしまうのである。実際に、平行四辺形の「ベーシック+1辺」では、3つの長さの積を答えた誤答がそれなりに存在する。

■「ベーシック＋1辺」の誤答分析

小5（3学期）と小6を合わせた「ベーシック＋1辺」の各図形における解答状況は、下の表のとおりである。ただし、㊦ひし形の問題は出題されていない。

㊡平行四辺形

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square$	996	90.1%
誤答	$\bigcirc \times \square \div 2$	26	2.4%
	その他誤答	78	7.1%
	無解答	5	0.5%
合計		1105	100.0%

㊢三角形

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2$	95	79.8%
誤答	$\bigcirc \times \square$	6	5.0%
	その他誤答	17	14.3%
	無解答	1	0.8%
合計		119	100.0%

㊣台形

解答類型		個数	割合
正解値	$(\bigcirc + \triangle) \times \square \div 2$	373	77.7%
誤答	$(\bigcirc + \triangle) \times \square$	18	3.8%
	$\bigcirc \times \square (\div 2)$	13	2.7%
	$\bigcirc \times \triangle \times \square (\div 2)$	7	1.5%
	その他誤答	63	13.1%
	無解答	6	1.3%
合計		480	100.0%

前ページの表と見比べると、「ベーシック＋1辺」では次のようなことがわかる。ただし、㊢三角形のサンプル数はかなり少ないことにご留意いただきたい。

・㊡平行四辺形

理解度(正解値の割合)は5ポイントほど下がるものの、よく見られた(2で割る)誤答の割合はほぼ変わらない。

・㊢三角形

理解度は8ポイントほど下がる。よく見られた(2で割らない)誤答の割合は2.7ポイントほど下がっているが、「二群の比率の差の検定」という統計手法を用いると、有意水準5%で「棄却されない」と判定されるため、よく見られた誤答に関しては差があるとはいえない。

・㊣台形

理解度は2ポイントほど上がっているが、これも「二群の比率の差の検定」では有意水準5%で「棄却されない」と判定されるため、理解度に差があるとはいえない。

ただ、よく見られた誤答に関しては、3種類とも2ポイント前後下がっており、これらは有意水準5%で棄却される。したがって台形の場合は、理解度は変わらないものの、よく見られる誤答の割合は下がるといえる。

台形の場合は、面積の公式がやや複雑であるうえに、面積を求めるにあたって必要な辺の長さが3つもあるため、あてずっぽうで正解する人がいないということなのだろう。

5. 番外編

前節までは、各図形の「ベーシック問題」に、面積を求めるにあたって必要のない1辺の長さを加えるとどうなるか、という視点で集計したデータを紹介した。本節では、それ以外の事例を紹介する。

■辺の長さが20より大きい図形の面積

前節までは、辺の長さが20以下の整数である図形を扱った。その範囲であれば、どの整数であっても理解度はほとんど変わらないことがその理由であったが、ではその範囲を超えたらどうなるのか、といった事例を紹介する。以下は、第306回の7級に出題した問題である。

右の図は、台形の形をした畑^{はたけ}です。これについて、
 次の問題に単位をつけて答えましょう。

(27) この畑の面積^{めんせき}は何 m^2 ですか。

(正解) 1360m^2

台形の「ベーシック問題」と、この問題の解答状況を比較すると、下のようになる。

台形の「ベーシック問題」(7級)

解答類型		個数	割合
正解値	$(\bigcirc + \triangle) \times \square \div 2$	3229	75.8%
誤答	$(\bigcirc + \triangle) \times \square$	272	6.4%
	$\bigcirc \times \square (\div 2)$	195	4.6%
	$\bigcirc \times \triangle \times \square (\div 2)$	156	3.7%
	その他誤答	381	8.9%
	無解答	28	0.7%
合計		4261	100.0%

上記の問題

個数	割合
382	65.2%
44	7.5%
16	2.7%
9	1.5%
130	22.2%
5	0.9%
586	100.0%

理解度が10ポイントほど下がり、よく見られた誤答も一部を除いて下がっている。その理由として、数値が大きくなったことにより計算力も必要になったからと考えられる。よく見られた誤答も、どこかで計算を誤ってしまったがために、その値までたどり着けなかったということなのであろう。唯一、割合が上がった解答は、2で割らなかった誤答であるが、「二群の比率の差の検定」では有意水準5%で「棄却されない」と判定されるため、差があるとはいえない。

■長方形の4辺の中点を結んでできたひし形の面積

第2節で、ひし形は他の図形と比べてもっとも理解度が低く、面積の求め方が定着していないことがわかった。しかし、下の問題のように、長方形の4辺の中点を結んでできたひし形の面積に関しては、理解度がひし形の「ベーシック問題」よりも高くなることがわかった。以下は、第233回の7級に出題した問題である。

右の図のように、長方形ABCDのそれぞれの辺の真ん中の点を結んで、ひし形をかきます。これについて、次の問題に単位をつけて答えましょう。

(27) 三角形AEHの面積は何 cm^2 ですか。

(28) ひし形EFGHの面積は何 cm^2 ですか。

(正解) 48cm^2

ひし形の「ベーシック問題」と、この(28)の問題の解答状況を比較すると、下のようになる。

ひし形の「ベーシック問題」(7級)

	解答類型	個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2$	557	70.4%
誤答	$\bigcirc \times \square$	144	18.2%
	その他誤答	79	10.0%
	無解答	11	1.4%
合計		791	100.0%

上記の(28)の問題

個数	割合
997	78.8%
91	7.2%
160	12.6%
18	1.4%
1266	100.0%

理解度が8ポイントほど上がり、よく見られた2で割らない誤答は11ポイントも下がった。「ベーシック問題」とは異なり、対角線の長さが与えられたわけではないが、どうやらこの図がヒントとなり、 8×12 を計算した値は正解ではないと気づいて修正されたらしい。このように誤りに気がついて修正できる力が備わっていることは喜ばしいことであるが、ひし形の「ベーシック問題」でも2つの対角線の積が何を表しているのかが自ら発見できるようになることが望ましい。

6社の小5の教科書を調べたところ、ひし形の面積を扱っているページ数は6社とももっとも少なく、平均して2ページ未満であった。つまり、ひし形の面積の求め方は他の図形と比べて学校でも時間をかけて教わず、定着していないといえる。上記の問題のように、ヒントを与えて考えさせるような問題を扱うことが望ましい。

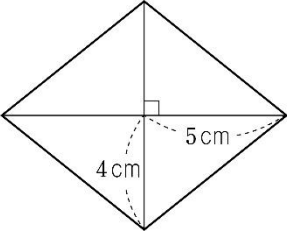
■対角線の半分の長さを与えたひし形の面積

第 291 回の 6 級で、対角線の半分の長さを与えたひし形の面積を求める問題を出題した。第 2 節で 6 級を受検した小 6 の「ベーシック問題」の結果を少し紹介したが、それと比較すると、理解度は変わらないことがわかった。以下はその問題と解答状況である。

下の図形の面積は何 cm^2 ですか。単位をつけて答えましょう。

(20) ひし形

(正解) 40cm^2



ひし形の「ベーシック問題」(6 級)

解答類型		個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \triangle \div 2$	3435	88.6%
誤答	$\bigcirc \times \triangle$	354	9.1%
	その他誤答	82	2.1%
	無解答	8	0.2%
	合計	3879	100.0%

上記の(20)の問題

個数	割合
383	88.7%
15	3.5%
34	7.9%
0	0.0%
432	100.0%

上述のとおり、理解度は変わらないものの、2つの対角線をかけただけの2で割らない誤答(上記の問題であれば「80」という解答)の割合は9.1%から3.5%と大きく下がり、その分「その他の誤答」の割合が上がった。「その他の誤答」で新たに加わった誤答は、 4×5 を計算して「20」とした解答(3.0%)と、 $4 \times 5 \div 2$ を計算して「10」とした解答(2.8%)であった。「80」、「20」、「10」という誤答を合わせると9.3%であり、上記の問題のような出題の仕方をしても前ページのようなヒントになることはなく、「ベーシック問題」で2つの対角線をかけただけの2で割らない誤答の割合が分散されるだけであることがわかった。

6. まとめ

- 前節までの調査結果により、以下の①～③が明らかになった。
- ①正解者であっても、面積の概念を理解していない児童がいる。具体的には、与えられた辺の長さの積を答えただけで、偶然正解した児童もいる。
 - ②平行四辺形と三角形の面積が求められなかった児童は、これらの面積の公式を混同している可能性がある。
 - ③図形の面積を求めるにあたって、必要最低限の値のみを与えたもつとも簡素化された「ベーシック問題」の場合は、台形を除いて5～10%ほど理解度が高くなる。

①、②から、面積とは何か(広さを表している)、ということからわかっていない(もしくは忘れている)という児童も少なくないことがわかる。そのため、1辺の長さが1 cmである正方形の面積が単位になっていることの理解を定着させたいところである。

③から、面積の問題を出題するにあたって、必要最低限の情報だけでなく、不要な辺の長さをいくつか与えて出題することで、面積の求め方を正しく理解しているかどうか把握することができる。ひし形では「ベーシック+1辺」の問題は出題されていなかったが、平行四辺形や三角形の理解度の変動から考慮すると、ひし形の理解度は5～10%ほど下がると推定される。

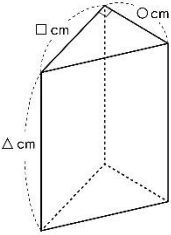
とくに、①、②にあてはまる場合、小6で学習する『角柱の体積』にも影響を及ぼす可能性があることもわかった。それを以下に示す。

■三角柱の体積の理解度

6級に出題した三角柱の体積の問題で、既習者と思われる11～3月に実施した検定の小6受検者に限定して調査を行ったところ、次のような調査結果が出た。

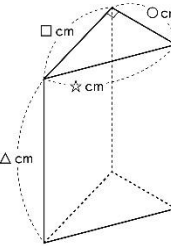
ベーシック問題

	解答類型	個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2 \times \triangle$	6113	86.3%
誤答	$\bigcirc \times \square \times \triangle$	551	7.8%
	その他誤答	395	5.6%
	無解答	24	0.3%
合計		7083	100.0%



ベーシック+1辺

	解答類型	個数	割合
正解値	$\bigcirc \times \square \div 2 \times \triangle$	2954	83.6%
誤答	$\bigcirc \times \square \times \triangle$	178	5.0%
	その他誤答	385	10.9%
	無解答	15	0.4%
合計		3532	100.0%



第4節で触れたが、7級で出題した三角形の面積を求める問題において、2で割らない誤答は「ベーシック問題」で7.7%、「ベーシック+1辺」で5.0%の割合だったため、上記の三角柱の体積での同様の誤答とほぼ同じ割合で現れているのである。

もちろん7級と6級で同一の児童が受検していたとは限らないが、この2で割らない誤りが克服されないまま進級している可能性もある。そもそも面積とは何か(広さを表している)、ということからわかっていない(もしくは忘れている)と思わせる解答も存在するため、1辺の長さが1 cmである正方形の面積が単位になっていることの理解を定着させたい所存である。

参考・引用文献

- [1]公益財団法人日本数学検定協会「第 206～422 回実用数学技能検定（数学検定） 6 級」
公益財団法人日本数学検定協会「第 206～422 回実用数学技能検定（数学検定） 7 級」
- [2]啓林館「わくわく算数 5」令和 2 年
- [3]東京書籍「新しい算数 5 下」令和 2 年
- [4]日本文教出版「小学算数 5 下」令和 2 年
- [5]大日本図書「たのしい算数 5 年」令和 2 年
- [6]学校図書「みんなと学ぶ算数 5 年下」令和 2 年
- [7]教育出版「小学算数 5」令和 2 年