数学甲子園® 2019

［文部科学省後援］第12回 全国数学選手権大会　Sugaku Koshien 2019

予選

競技上の注意

1．開始の合図があるまで問題用紙を開かないでください。
2．制限時間は６０分です。
3．競技中は他の人と相談することはできません。
4．筆記用具，消しゴムのみ使用することができます。
5．途中提出することはできません。

解答上の注意

1．解答用紙には答えだけを書いてください。
2．答えが分数になるとき，約分してもっとも簡単な分数にしてください。
3．答えに根号が含まれるとき，根号の中の数はもっとも小さい正の整数にしてください。

公益財団法人
日本数学検定協会

数学甲子園®2019　第12回 全国数学選手権大会　予選

問題１．次の式を因数分解しなさい。

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

問題２．数学定数の１つにネイピア数 e があり，その値は

$$e=2.718281828459\cdots$$

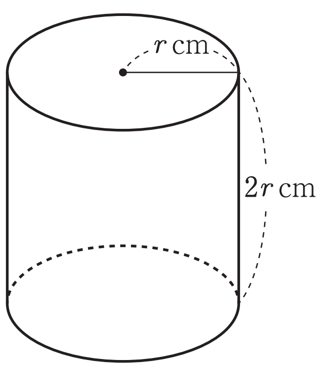
と無限に続きます。e を近似する循環小数 $2.7\dot{1}82\dot{8}$ を既約分数で表しなさい。

問題３．下の枠内の文章は，図の円柱，球，円錐の体積や表面積について述べたものです。

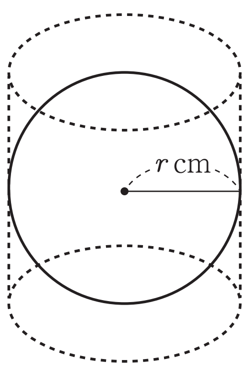
$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

> 円柱，球，円錐の体積の比は３：２：１で，表面積の比は３：$\boxed{\text{ア}}$：$\boxed{\text{イ}}$ です。

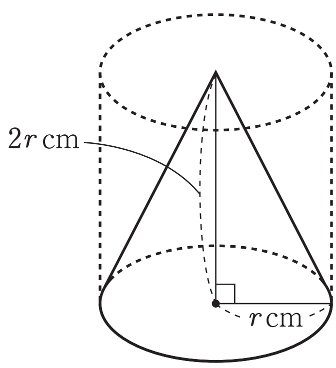
円柱



球



円錐



問題４．３辺の長さがそれぞれAB＝３３１, BC＝３４１, CA＝２１である△ABCの内角の大きさを∠ABC＝$x°$，∠BCA＝$y°$，∠CAB＝$z°$とします。このとき，x，y，zの中に，値が整数であるものが１つだけ存在します。それはどれですか。また，その値を求めなさい。

問題５．１辺の長さが a である正四面体Aと，１辺の長さが a である正八面体Bがあります。Bの体積はAの体積の何倍ですか。

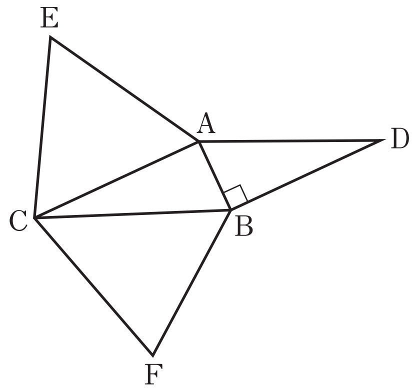
問題６．正六角形の板があります。その各辺に, 以下の規則で赤, 青, 黒のいずれかの色をぬるとき, 全部で何通りのぬり方がありますか。

・必ずしも３色すべてを使う必要はないが，隣り合う辺は別の色にする。
・回転して同じになるぬり方は同一のものとして，区別しない。
・裏返してはじめて同じ色の配列になる鏡像体は，別のぬり方とする。

問題７．次の等式を満たす正の整数 a，b の組をすべて求めなさい。

$$ab = a^b$$

問題８．右の図は，ある四面体の展開図で，△ＡＥＣは正三角形です。ＡＢ＝５，ＡＣ＝１２，ＢＣ＝１３，∠ＡＢＤ＝９０°のとき，この四面体の体積を求めなさい。



問題９．$\tan 18^\circ \times \tan 54^\circ$ の値を求めなさい。

問題10．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ (n+2)a_{n+1} = na_n + 4n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，第 n 項 a_n を求めなさい。

問題11. ２つの袋Ａ, Ｂがあります。Ａの袋には $\boxed{10}$, $\boxed{20}$, $\boxed{30}$, $\boxed{40}$, $\boxed{50}$ のカードが１枚ずつ入っています。Ｂの袋には $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{10}$ のカードがそれぞれ１０枚, ４枚, ３枚, ２枚, １枚入っています。

Ａ, Ｂの袋から無作為に１枚ずつを取り出し, ２枚のカードに書かれた数の積を X とするとき, X の分散を求めなさい。

問題12. ３次式 $f(x)$ が次の条件を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい。

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(x)+6f(x-1)+f(x-2)=f(2x-1)$$

問題13. ３直線 $y=-\dfrac{3}{4}x+8$, $y=-\dfrac{5}{12}x+16$, $y=\dfrac{3}{4}x+2$ によって囲まれてできる三角形の内接円の半径を求めなさい。

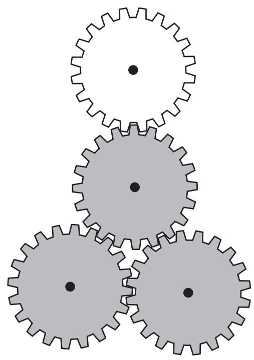
問題14. Ａ, Ｂ, Ｃの３人が１対１形式のゲームを次々と行います。１回のゲームでＡがＢに勝つ確率は$\dfrac{2}{3}$，ＢがＣに勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$，ＣがＡに勝つ確率は$\dfrac{1}{3}$で，引き分けはありません。

第n戦（nは正の整数）の勝者と残りの人（第n戦に参加しなかった人）が第（$n+1$）戦で対戦し，２連勝した人を優勝とします。第１戦でＡとＢが対戦し，誰かが優勝するまでゲームを続けるとき，第$3n$戦でＣが優勝する確率を求めなさい。

問題15. $a>0$，$b>0$とします。次の等式が成り立つとき，$\dfrac{a}{b}$のとり得る値をすべて求めなさい。答えが分数になる場合は，分母を有理化して答えなさい。

$$2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b+3$$

問題16. 右の図のように，同じ大きさで同じ歯数の歯車４つを組み合わせます。いちばん上以外の３つの歯車を固定し，その周りを上の歯車が一周するとき，動かす歯車自体は何回転するか答えなさい。



問題17. 次の整式を，係数が整数の範囲で因数分解しなさい。

$$x^5 + x + 1$$

問題18. a を定数とします。２次方程式 $x^2 + ax + a = 0$ が異なる２つの実数解をもち，かつ１より大きく２より小さい解は１つだけ存在するとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題19. ２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = 8,\ |4\vec{a} + \vec{b}| = 5$$

を満たすとき，$|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値，最小値をそれぞれ求めなさい。

問題20. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$，$g(x) = x^2 + 2x - 7$ とします。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における $y = f(x)$ の接線と，曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(b,\ g(b))$ における $y = g(x)$ の接線が一致しました。このような接線の方程式をすべて求めなさい。

数学検定