

数学甲子園[®]2019

〔文部科学省後援〕第12回全国数学選手権大会

Sugaku Koshien 2019

予選

競技上の注意

1. 開始の合図があるまで問題用紙を開かないでください。
2. 制限時間は60分です。
3. 競技中は他の人と相談することはできません。
4. 筆記用具、消しゴムのみ使用することができます。
5. 途中提出することはできません。

解答上の注意

1. 解答用紙には答えだけを書いてください。
2. 答えが分数になるとき、約分してもっとも簡単な分数にしてください。
3. 答えに根号が含まれるとき、根号の中の数はもっとも小さい正の整数にしてください。

下記の「個人情報の取扱い」についてご同意いただいたうえでご提出ください。

【この解答用紙でお預かりするすべての個人情報の取扱いについて】

1. 事業者の名称 公益財団法人 日本数学検定協会
2. 個人情報保護管理者の職名、所属及び連絡先
管理者職名：個人情報保護管理者 所属部署：事務局 事務局次長 連絡先：電話 03-5812-8340
3. 個人情報の利用目的 「数学甲子園」の参加者情報の管理、採点、本人確認のため
4. 個人情報の第三者への提供 参加者の紹介のため、氏名、学校名、都道府県名、写真、動画等を、当協会の広報誌、公式サイトやマスコミ等を通じて、広く一般的に提供することがあります。
5. 個人情報取り扱いの委託 前項利用目的の範囲に限って個人情報を外部に委託することがあります。
6. 個人情報の開示等の請求 ご本人様はご自身の個人情報の開示等に関して、下記の当協会お問い合わせ窓口へ申し出ることができます。その際、当協会はご本人様を確認させていただいたうえで、合理的な対応を期間内にいたします。
【お問い合わせ窓口】
公益財団法人 日本数学検定協会 「数学甲子園」係 〒110-0005 東京都台東区上野5-1-1 文昌堂ビル6階
TEL：03-5812-8340 電話受付時間 月～金 9:30～17:00（祝日・年末年始・当協会の休日を除く）
7. 個人情報を提供されることの任意性について ご本人様が当協会に個人情報を提供されるかどうかは任意によるものです。ただし正しい情報をいただけない場合、適切な対応ができない場合があります。



公益財団法人

日本数学検定協会

数学甲子園[®]2019 第12回 全国数学選手権大会 予選

問題1. 次の式を因数分解しなさい。

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$$

問題2. 数学定数の1つにネイピア数 e があり, その値は

$$e = 2.718281828459 \dots$$

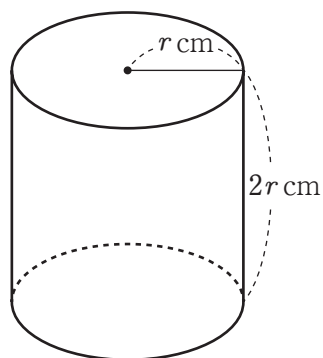
と無限に続きます。 e を近似する循環小数 $2.7\dot{1}82\dot{8}$ を既約分数で表しなさい。

問題3. 下の枠内の文章は, 図の円柱, 球, 円錐の体積や表面積について述べたものです。

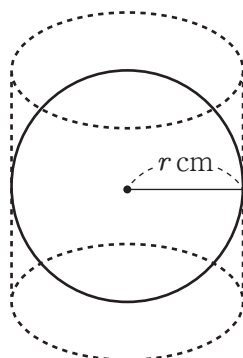
, にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

円柱, 球, 円錐の体積の比は $3 : 2 : 1$ で, 表面積の比は $3 : \text{ア} : \text{イ}$ です。

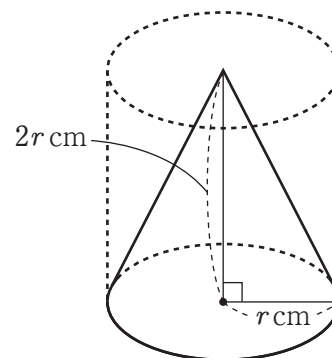
円柱



球



円錐



問題4. 3辺の長さがそれぞれ $AB=331$, $BC=341$, $CA=21$ である $\triangle ABC$ の内角の大きさを $\angle ABC=x^\circ$, $\angle BCA=y^\circ$, $\angle CAB=z^\circ$ とします。このとき, x , y , z の中に, 値が整数であるものが1つだけ存在します。それはどれですか。また, その値を求めなさい。

問題5. 1辺の長さが a である正四面体Aと, 1辺の長さが a である正八面体Bがあります。Bの体積はAの体積の何倍ですか。

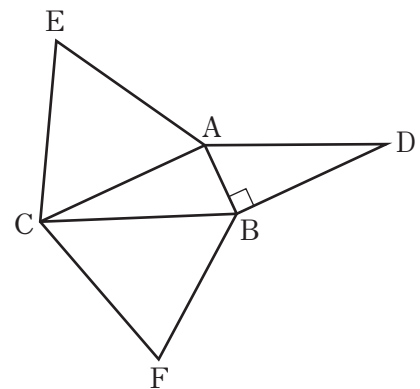
問題6. 正六角形の板があります。その各辺に, 以下の規則で赤, 青, 黒のいずれかの色をぬるとき, 全部で何通りのぬり方がありますか。

- ・必ずしも3色すべてを使う必要はないが, 隣り合う辺は別の色にする。
- ・回転して同じになるぬり方は同一のものとして, 区別しない。
- ・裏返してはじめて同じ色の配列になる鏡像体は, 別のぬり方とする。

問題7. 次の等式を満たす正の整数 a , b の組をすべて求めなさい。

$$ab = a^b$$

問題8. 右の図は、ある四面体の展開図で、 $\triangle AEC$ は正三角形です。 $AB=5$, $AC=12$, $BC=13$, $\angle ABD=90^\circ$ のとき、この四面体の体積を求めなさい。



問題9. $\tan 18^\circ \times \tan 54^\circ$ の値を求めなさい。

問題10. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, (n+2)a_{n+1} = na_n + 4n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、第 n 項 a_n を求めなさい。

問題11. 2つの袋A, Bがあります。Aの袋には $\boxed{10}$, $\boxed{20}$, $\boxed{30}$, $\boxed{40}$, $\boxed{50}$ のカードが1枚ずつ入っています。Bの袋には $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{10}$ のカードがそれぞれ10枚, 4枚, 3枚, 2枚, 1枚入っています。

A, Bの袋から無作為に1枚ずつを取り出し, 2枚のカードに書かれた数の積を X とするとき, X の分散を求めなさい。

問題12. 3次式 $f(x)$ が次の条件を満たすとき, $f(x)$ を求めなさい。

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(x) + 6f(x-1) + f(x-2) = f(2x-1)$$

問題13. 3直線 $y = -\frac{3}{4}x + 8$, $y = -\frac{5}{12}x + 16$, $y = \frac{3}{4}x + 2$ によって囲まれてできる三角形の内接円の半径を求めなさい。

問題14. A, B, Cの3人が1対1形式のゲームを次々に行います。1回のゲームでAがBに勝つ確率は $\frac{2}{3}$, BがCに勝つ確率は $\frac{1}{2}$, CがAに勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で, 引き分けはありません。

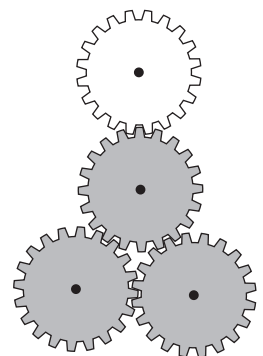
第 n 戦(n は正の整数)の勝者と残り的人(第 n 戦に参加しなかった人)が第 $(n+1)$ 戦で対戦し, 2連勝した人を優勝とします。第1戦でAとBが対戦し, 誰かが優勝するまでゲームを続けるとき, 第 $3n$ 戦でCが優勝する確率を求めなさい。

問題15. $a > 0$, $b > 0$ とします。次の等式が成り立つとき, $\frac{a}{b}$ のとり得る値をすべて求めなさい。

答えが分数になる場合は, 分母を有理化して答えなさい。

$$2 \log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b + 3$$

問題16. 右の図のように, 同じ大きさで同じ歯数の歯車4つを組み合わせます。いちばん上以外の3つの歯車を固定し, その周りを上の歯車が一周するとき, 動かす歯車自体は何回転するか答えなさい。



問題17. 次の整式を、係数が整数の範囲で因数分解しなさい。

$$x^5 + x + 1$$

問題18. a を定数とします。2次方程式 $x^2 + ax + a = 0$ が異なる2つの実数解をもち、かつ1より大きく2より小さい解は1つだけ存在するとき、 a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題19. 2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = 8, |4\vec{a} + \vec{b}| = 5$$

を満たすとき、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値, 最小値をそれぞれ求めなさい。

問題20. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2 + 2x - 7$ とします。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の接線と、曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(b, g(b))$ における $y = g(x)$ の接線が一致しました。このような接線の方程式をすべて求めなさい。



数学検定