

数学甲子園[®]2018

〔文部科学省後援〕第11回 全国数学選手権大会

Sugaku Koshien 2018

予選

競技上の注意

1. 開始の合図があるまで問題用紙を開かないでください。
2. 制限時間は60分です。
3. 競技中は他の人と相談することはできません。
4. 筆記用具、消しゴムのみ使用することができます。
5. 途中提出することはできません。

解答上の注意

1. 解答用紙には答えだけを書いてください。
2. 答えが分数になるとき、約分してもっとも簡単な分数にしてください。
3. 答えに根号が含まれるとき、根号の中の数はもっとも小さい正の整数にしてください。

下記の「個人情報の取扱い」についてご同意いただいたうえでご提出ください。

【この解答用紙でお預かりするすべての個人情報の取扱いについて】

1. 事業者の名称 公益財団法人 日本数学検定協会
2. 個人情報保護管理者の職名、所属及び連絡先
管理者職名：個人情報保護管理者 所属部署：事務局 事務局次長 連絡先：電話 03-5812-8340
3. 個人情報の利用目的 「数学甲子園」の参加者情報の管理、採点、本人確認のため
4. 個人情報の第三者への提供 参加者の紹介のため、氏名、学校名、都道府県名、写真、動画等を、当協会の広報誌、公式サイトやマスコミ等を通じて、広く一般的に提供することがあります。
5. 個人情報取り扱いの委託 前項利用目的の範囲に限って個人情報を外部に委託することがあります。
6. 個人情報の開示等の請求 ご本人様はご自身の個人情報の開示等に関して、下記の当協会お問い合わせ窓口にお申し出ることができます。その際、当協会にご本人様を確認させていただいたうえで、合理的な対応を期間内にいたします。
【お問い合わせ窓口】
公益財団法人 日本数学検定協会 「数学甲子園」係 〒110-0005 東京都台東区上野5-1-1 文昌堂ビル6階
TEL：03-5812-8340 電話受付時間 月～金 9:30～17:00（祝日・年末年始・当協会の休日を除く）
7. 個人情報を提供されることの任意性について ご本人様が当協会に個人情報を提供されるかどうかは任意によるものです。ただし正しい情報をいただけない場合、適切な対応ができない場合があります。



公益財団法人

日本数学検定協会

数学甲子園[®]2018 第11回 全国数学選手権大会 予選

問題1. 次の式を因数分解しなさい。

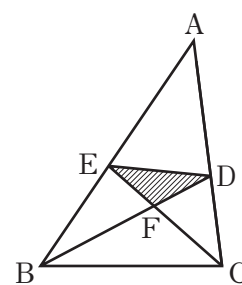
$$36x^2 + 6xy - 12y^2 + 11x + 26y - 12$$

問題2. x についての2次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解が $x = a$ であるとき, a, b, c の符号をそれぞれ求めなさい。

問題3. 次の式を簡単にしなさい。

$$\frac{(4 + \sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4 - \sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6 + \sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6 - \sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

問題4. $AB = 6, BC = 4, CA = 5$ の $\triangle ABC$ があり, $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点を D , $\angle ACB$ の二等分線と辺 AB の交点を E , 線分 CE と BD の交点を F とします。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, $\triangle DEF$ の面積を S を用いて表しなさい。



問題5. あるスーパーマーケットでは, 1パック8個入りの卵が売られています。下のデータは, 無作為に選んだ2つのパックA, Bに入っていた卵の重さ(単位:g)です。

A 59, 62, 60, 63, 62, 59, 61, 62

B 62, 59, 58, 61, 60, 63, 58, 59

それぞれのデータについて, 分散を求めなさい。

問題6. $x = \omega + 2i$ を解にもつ整数係数の n 次方程式のうち、次数が最小で x の最高次数の項の係数が1であるものを求めなさい。ただし、 ω は $\omega^3 = 1$ を満たす虚数、 i は虚数単位を表します。

問題7. $\tan \frac{x}{2} = t$ とするとき、 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ を、それぞれ t を用いて表しなさい。

問題8. 正の整数 a , b に対して、 a^2 は9桁、 $a^2 b^4$ は34桁の数とします。このとき、 a と b の桁数をそれぞれ求めなさい。

問題9. 次の式を展開したときの項数を求め、 n を用いて表しなさい。

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2$$

問題10. 1 から n ($n \geq 2$) までの相異なる n 個の整数の中から無作為に2個選びます。大きい数を X , 小さい数を Y とするとき、 X の期待値を求めなさい。

問題11. すべての辺の長さが a である正四角錐と、1辺の長さが a である正四面体があります。
この2つの立体の正三角形の面をぴったりとくっつけてできる立体は、何面体ですか。

問題12. xy 平面において、次の連立不等式が表す図形の面積を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 \geq 0 \\ |x| + |y| \leq 1 \end{cases}$$

問題13. a, b, c, d を正の整数とします。線分 AB を $a:b$ に内分する点を C , $c:d$ に内分する点を D とするとき、 $AC:CD:DB$ を a, b, c, d を用いた整数比で表しなさい。ただし、点 A, C, D, B はこの順に並んでいるものとします。

問題14. $\triangle ABC$ の3辺BC, CA, ABの長さをそれぞれ a , b , c とします。次の等式が成り立つとき、 $\triangle ABC$ の内角のうち、最大の角の大きさを求めなさい。

$$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$$

問題15. k を正の整数とします。 $P(k)=1^k+2^k+3^k+4^k+5^k+6^k$ とすると

$$P(1)=1+2+3+4+5+6=21$$

$$P(2)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

$$P(3)=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441$$

であり、 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ はすべて7の倍数となりますが、 k の値によっては7の倍数にならないこともあります。 $P(k)$ が7の倍数にならない k の値をすべて求めなさい。

問題16. 次の等式を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めなさい。

$$xy^3 - 3y - x = 1$$

問題17. 連続する5つの正の整数について、下の法則が成り立ちます。

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 5 &= 125 = 5 \times 5^2 \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 6 &= 726 = 6 \times 11^2 \\ 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 7 &= 2527 = 7 \times 19^2 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

このとき、次の等式を満たす正の整数 n の値を求めなさい。

$$2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020 + 2020 = 2020 \times n^2$$

問題18. さいころ A, B, C, D を同時に振り、出た目をそれぞれ a, b, c, d とします。このとき、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の座標が $(-1, d)$ となる確率を求めなさい。ただし、さいころの目は1から6まであり、どの目も出る確率は等しいものとします。

問題19. $OA = 3$, $OB = 4$, $\angle AOB = 60^\circ$ である $\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を通り OA に垂直な直線と、辺 OB の中点を通り OB に垂直な直線との交点を Q とします。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると、 \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表しなさい。

問題20. $f(x) = \int_{-1}^1 (4x - 2t) f(t) dt + 3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。



数学検定