数学甲子園®2019　第12回全国数学選手権大会 Math Battle

問題１.

a を実数の定数とします。次の方程式が表す xy 平面上の曲線が y 軸と共有点をもたないとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

$$2x^3+3x^2y+5y^2-2xy-\frac{3}{2}x+\sqrt{5}\,y-a=0$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題２.

単位円の円周を五等分する点を $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$，$\mathrm{A_4}$，$\mathrm{A_5}$ とします。弦 $\mathrm{A_1A_2}$，$\mathrm{A_1A_3}$ について $(\mathrm{A_1A_2} \times \mathrm{A_1A_3})^2$ の値を求めなさい。ただし，$\mathrm{A_1A_2} < \mathrm{A_1A_3}$ とします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題３．

０，２，３，５，７の５つの数字を並べて５桁の整数をつくります。このようにしてできる整数のうち，異なるものすべての和を求めなさい。ただし，一万の位が０のときは５桁の整数でないものとします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

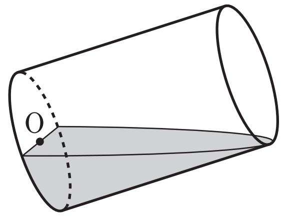
問題４.

　$36x+42y+49z+63w=100$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z,\ w)$ の中で，$(x+y)^2+(z+w)^2$ の値が最小となり，かつ $|x|\leqq 10$ を満たすような $(x,\ y,\ z,\ w)$ をすべて求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題５.

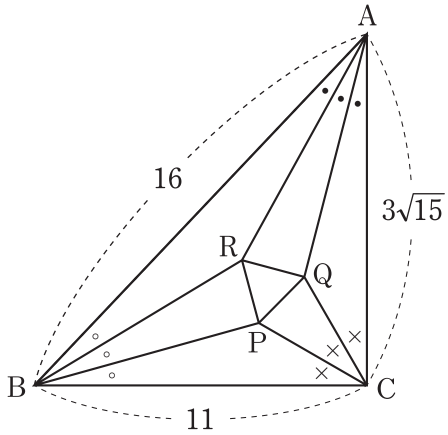
右の図のように，水をいっぱいに入れた直円柱形のコップを傾けて水を捨て，コップの底面の中心Oが水面に現れる時点で，捨てることをやめます。このとき，残った水の量は捨てた水の量の何倍ですか。



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題６.

右の図のように$AB=16$，$BC=11$，$CA=3\sqrt{15}$である直角三角形ABCにおいて，それぞれ角の三等分線を引きます。△ABCの各辺に近いものどうしの交点を結んで△PQRをつくるとき，△PQRの面積を求めなさい。



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題７.

次の関数の最大値を求めなさい(最大値をとる x の値を求める必要はありません)。

$$f(x)=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題８．

xyz 空間内の４点 O（0，0，0），A（$2\sqrt{5}$，0，-5），B（$2\sqrt{5}$，2，0），C（0，2，-5）を通る球面の方程式を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題９.

数列$\{a_n\}$を

$$a_n = n^2 - n + 41 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)$$

によって定めるとき，a_1，a_2，$\cdots$，a_{40}はすべて素数となります。
数列$\{b_n\}$を$\{a_n\}$を並べ替えてできる数列とするとき

$$\sum_{k=1}^{40} a_k b_k$$

の最大値を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題10．

複素数平面上に相異なる３点 O(0)，A(α)，B(β) があります。α，β が

$$4\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta,\quad 0\leqq \arg\frac{\alpha}{\beta}\leqq\pi$$

を満たすとき，△OABの周の長さは，△OABのもっとも短い辺の長さの何倍ですか。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題11．

下の表は３６人の生徒が受けた２種類のテストＡ，Ｂの点数をまとめたものです。

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
テストＡ	16	23	17	21	21	22	20	17	21	17	17	20
テストＢ	10	13	11	10	12	13	11	10	12	9	11	9

出席番号	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
テストＡ	17	20	22	18	17	17	21	23	19	19	20	24
テストＢ	10	11	11	9	7	7	9	8	11	10	10	12

出席番号	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
テストＡ	22	20	22	23	21	18	22	21	20	21	20	21
テストＢ	10	8	11	10	10	8	12	9	7	11	8	10

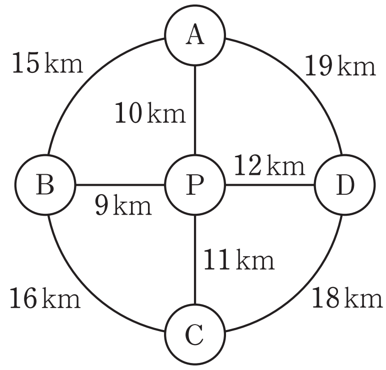
テストＡ，Ｂの平均点はそれぞれ２０点，１０点です。これについて，テストＡ，Ｂの点数の相関係数を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題12.

右の図のように，５つの町A，B，C，D，Pとそれぞれの町を結ぶ道路があります。道路の長さは図のとおりで，この道路以外には通り道はないものとします。

Ｐ町から自動車で出発し, 右の図のすべての道路を通り, 再びＰ町に戻ります。走行距離が最短になるように走行するとき，その走行距離を求めなさい。ただし，同じ道路を何回通ってもよいものとします。



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

問題１３．

When a fair coin is tossed n times, let A be the event "the coin shows heads exactly five times." Find the value(s) of n that maximize(s) the probability that event A will occur. Also find the corresponding probability.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

問題１４．

The diagonals of convex quadrilateral ABCD cross at point O. Find the minimum area of the quadrilateral if the area of △AOB is 3 and the area of △COD is 27.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

問題１５.

Consider the fourth-degree polynomial with integral coefficients

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1.$$

Find all nonzero integers a, b and c with $a<b<c$ such that the polynomial can be expressed as the product of two polynomials with integral coefficients.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

問題１６．

Suppose that the amount denoted by A, in milligrams, of a 10-milligram dose of a drug remaining in the body after t hours is given by the exponential function $A(t)=10\times(0.8)^t$. Find, to the nearest tenth, the number of hours after which half of the original drug dose will be left in the body. Use the value $\log_{10}2=0.3010$ if necessary. Include units in your answer.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

問題17.

Find the distance from one of the foci of $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ to one of its asymptotes.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

問題１８．

Find the minimum positive integer that leaves remainders of the consecutive integers 1, 2, 3, …, 9 when divided in turn by the consecutive integers 2, 3, 4, …, 10, respectively.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.