数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題1.

次の式を整数係数の範囲で因数分解しなさい。

$$(2x^2-1)^2+\{2(x+1)^2-1\}^2$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題２.

すべての内角が１８０° 未満の四角形 ABCD において

AB＝３，BC＝４，CD＝４，DA＝１

です。このとき，四角形 ABCD の面積を S として，S のとり得る値の範囲を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題３.

関数 $y=(x^2-2x+3)^2+2(x^2-2x)+4$ の最小値と，そのときの x の値を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題４.

３桁の正の整数 ABC について，その累乗

$(ABC)^2$, $(ABC)^3$, $(ABC)^4$，…

を計算したところ，どの数も百の位が A，十の位が B，一の位が C になりました。このような３桁の正の整数 ABC をすべて求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題５.

文字 A，B を並べて，次の２条件を満たす文字列をつくります。

条件１：全体として A と B が同数である。

条件２：文字と文字の間に１つ仕切りを入れたとき，その仕切りより左にある A の数は B の数より多い。

たとえば，A と B を３個ずつ使うとき，できる文字列は

AAABBB，AABABB

の２通りです。

A と B を n 個ずつ使うとき，このような文字列は何通りできますか。階乗記号！を用いて表しなさい。ただし，n は正の整数とします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題６.

$\dfrac{10^{220}}{10^{10}-2}$ を小数で表したときの一の位の数を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題７.

白と黒のタイルを用いて，３×３のボードをつくります。１つの行または列の３つのタイルの色をすべて変化(黒ならば白，白ならば黒に変換)させる操作を行います。この操作を繰り返すことで，すべてのタイルを白にすることができるタイルの配置の総数を求めなさい。ただし，回転・裏返しによる配置の同一視は行わないものとします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題８.

ある電子式抽選機から当たりが出る確率は０.２であることが公表されています。この抽選機を４００回引くとき，当たりが出る回数が７６以上８４以下である確率を，抽選回数４００が十分大きいとして，正規分布で近似する方法で求めなさい。解答の際には，下の正規分布表の値を用いなさい。答えは小数第３位を四捨五入して小数第２位まで求めなさい。

正規分布表

下の表は確率変数 X が平均０，標準偏差１の正規分布に従うときの $0 \leqq X \leqq u$ である確率を表します。

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題９.

フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ は

$f_1=1$，$f_2=1$，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$　（$n=1$，２，３，…）

によって定義されます。f_1，f_2，f_3，…をフィボナッチ数といいます。

次の数列の和を，フィボナッチ数どうしの２数の積の形に表しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} f_k f_{k+1}$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題10.

右の図１のように，$x^2+y^2=36$で表される円Oに，半径１の円Pが点A（6，0）で内接しています。このとき，点Aと重なっている円Pの周上の点をQとします。この状態から円Pは円Oに内接しながら，円Oの周にそってすべることなく矢印の方向（x軸と正の角度をなす方向）に回転していきます。図２のように，円Pが円Oの周上を回転したときの円Oと円Pとの接点をRとし，弧ARの長さをθとします。このとき図１で点Aと重なっていた点Qは図２のような位置にきます。

θが$0 \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くとき，点Qが動いてできる曲線の長さを求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

図１

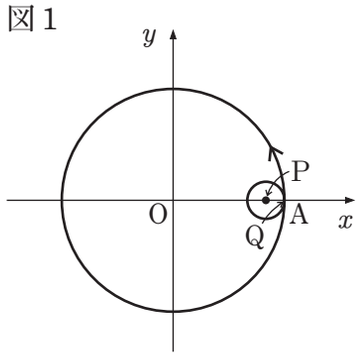
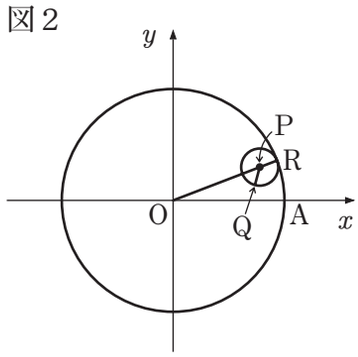


図２



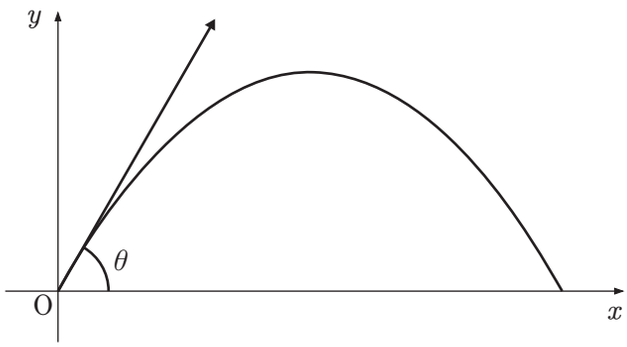
数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題11.

右の図のように，地面に沿ってx軸をとり，鉛直上方にy軸をとります。原点Oから物体をx軸からθの角度で斜め上方に10の速さで投げ上げると，物体は放物線をえがいて運動し，その放物線はおよそ

$$y=(\tan\theta)x-\left(\frac{1}{20\cos^2\theta}\right)x^2$$

という式で表されます。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$とします。



この放物線の頂点は，θを動かすとある曲線をえがきます。この曲線の方程式をx，yを用いて表しなさい。また，x，yのとり得る値の範囲も明記しなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題12.

１辺の長さがℓの立方体に含まれる正八面体(頂点は立方体の面や辺上にあってもかまいません)について，その体積の最大値を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題13.

Find the values of a for which the following system of equations has infinitely many solutions.

$$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ x+y-3z=a \\ 2x-y-2z=a^2 \end{cases}$$

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題14.

For the circle $x^2+y^2+6x-8y=0$, find the range of values of m for which the family of lines $y=mx-\frac{1}{3}$ do not meet the circle.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題15.

Point E lies on side CD of rectangle ABCD. Circle O is inscribed in trapezoid ABCE. Circle P is tangent to AB, AE and circle O externally. Circle Q is inscribed in △ADE. Find the radius of circle O if the radii of circles P and Q are both 3.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題16.

Line ℓ has equation $\vec{r}=(-1, 4, 0)+\lambda(1, 1, -1)$ and point A has coordinates $(3, -2, 7)$.
Find the coordinates of the reflection of the point A in ℓ.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題17.

The cubic equation $z^3-az^2+3az+b=0$ has real root -1 and complex roots $x\pm yi$, where a, b, x and y are real numbers and $y>0$. Note that i represents the imaginary unit. If the three points -1, $x+yi$ and $x-yi$ in the complex plane are the vertices of an equilateral triangle, find all pairs of a and b.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園®2018　第11回全国数学選手権大会 Math Battle

問題18.

Find all three-digit numbers that are equal to the sum of the factorials of their digits.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.