

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 1.

次の式を整数係数の範囲で因数分解しなさい。

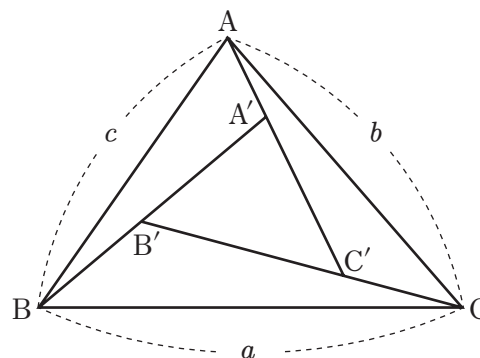
$$x^8 - 2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題2.

$\triangle ABC$ において、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とします。右の図のように、各頂点から向かい合う辺に直線を引き、頂点Aから引いた直線と頂点Bから引いた直線との交点を A' 、頂点Bから引いた直線と頂点Cから引いた直線との交点を B' 、頂点Cから引いた直線と頂点Aから引いた直線との交点を C' とすると、 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ となりました。このとき、比 $AA' : BB' : CC'$ を a 、 b 、 c を用いて表しなさい。



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 3.

a をもっとも小さい数とする, 連続する n 個の正の整数があります。これらの和が 1000 であるとき, (a, n) の組として考えられるものをすべて求めなさい。ただし, n は 2 以上の整数とします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 4.

1 個の白球と 2 個の赤球が入っている袋があります。この袋の中から中身を見ずに球を 1 個取り出します。取り出した球が白球なら、取り出した球に赤球を 1 個加えて袋に戻します。取り出した球が赤球なら、取り出した球に白球を 1 個加えて袋に戻します。この試行を繰り返すとき、 n 回めの試行で白球が取り出される確率 p_n を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題5.

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ が方程式 $f(x) = 0$ の解の1つとなるような整数係数の3次多項式 $f(x)$ を求めなさい。ただし、 x^3 の係数は1であるとします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題6.

次の関数の最小値，およびそのときの x の値を求めなさい。

$$y = 2 \cdot 3^{3x-1} + 2 \cdot 3^{-3x-1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{2x+1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{-2x+1} - 2$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 7.

$[x]$ を x 以下の最大の整数とします。このとき、第 n 項が $a_n = [\sqrt{n}] \cdot (-1)^{n-1}$ で表される数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 2017 項 a_{2017} までの和を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 8.

$\vec{n}$ を単位ベクトルとします。点 A ($\vec{a}$) を通り, $\vec{n}$ に垂直な平面を α とし, 点 B ($\vec{b}$) は平面 α 上にないものとします。このとき, 平面 α に関して点 B と対称な点 C の位置ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

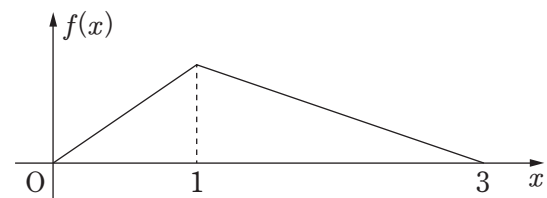
数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 9.

次の確率密度関数 $f(x)$ を考えます。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & (0 \leq x < 1) \\ 1 - \frac{1}{3}x & (1 \leq x \leq 3) \\ 0 & (x < 0, 3 < x) \end{cases}$$

これをグラフで表したとき、右の図のように三角形状になります。 $f(x)$ が定める確率分布は三角分布とよばれ、自然現象や社会現象を説明する統計モデルとしてしばしば登場します。



$f(x)$ を確率密度関数にもつ確率変数 X について、その分散を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 10.

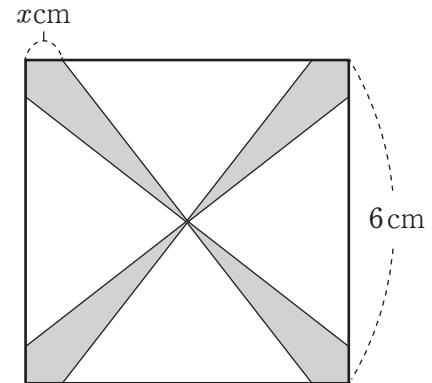
xy 平面上の曲線 $13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 12x - 12\sqrt{3}y + 20 = 0$ を, 原点を中心として $\frac{5}{3}\pi$ だけ回転させた曲線の方程式を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 11.

1 辺の長さが 6 cm の正方形の紙があります。
右の図のように、この正方形の四隅からそれぞれ $x\text{ cm}$ ($0 < x < 3$) だけ離れた点を取り、正方形の中心と結んでできる風形部分を切り取り、残りの部分を側面とする四角錐の容器を作ります(のりしろの部分を考える必要はありません)。この容器の容積を $V\text{ cm}^3$ とするとき、 V の最大値とそのときの x の値をそれぞれ求めなさい。



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 12.

右の枠内は、あるプログラムを言葉で表現したものです。とくに指示がない場合は、①から順に処理をします。

①でMに20000, Nに10, Rに1を入力したときに出力される値を求めなさい。

- ① 正の整数M, N, Rを入力する。
- ② Aの値を1とする。
- ③ Rに0.01をかけた後, 1を加えた値を新しいRの値とする。
- ④ MにRをかけた値をPの値とする。
- ⑤ Aの値とNの値が等しいとき, 有効数字3桁で表したPの値を出力して処理を終了する。Aの値とNの値が異なるとき, ⑥へ進む。
- ⑥ MとPの値の和にRの値をかけた値を新しいPの値とする。
- ⑦ Aに1を加えた値を新しいAの値として, ⑤へ戻る。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 13.

The graph of $y = -2x^3 + 4x$ is translated 3 units in the positive vertical direction and 2 units to the left, and is then reflected in the x -axis. Find the equation of the resulting graph in the form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 14.

In how many different ways can a convex heptagon be decomposed into triangles by diagonals which do not intersect within the heptagon? Note that a convex polygon is one whose interior vertex angles are all less than 180° .

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 15.

The coefficient of x^2 in the expansion of $(1 + ax)^n$ is 63 and the coefficient of x is 12. Find the values of a and n , where a is a real number and n is a positive integer.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 16.

For $\triangle ABC$ with $AB = 12$ and $AC = 16$, a point D lies on the side BC such that $BD:DC = 2:3$.

Points E and F are taken on sides AB and AC , respectively, and two lines EF and AD intersect at G . If $2AE = AF$, find $EG:GF$.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 17.

Let D be the region bounded by $y = 1 - x^2$ and $y = 0$. Find the volume of the solid obtained by revolving D about the line $y = -3$.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2017 第10回全国数学選手権大会 Math Battle

問題 18.

A regular octahedron of edge length a is cut by a plane parallel to one of its faces. Find the perimeter of the section.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.