

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 1.

$x = -3 + 2i$ のとき, $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ の値を求めなさい。ただし, i は虚数単位を表します。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第 7 回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 2.

n を正の整数とします。次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = a_n + (4n + 5) 5^n$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題3.

四面体 $O-ABC$ において, $OA=5$, $OB=4$, $OC=3$, $AB=BC=CA=6$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とします。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし, 平面 ABC との交点を H とするとき, \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表しなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題4.

$a \geq 0$ とします。次の式で与えられる $S(a)$ が最小となるときの a の値を求めなさい。

$$S(a) = \int_0^2 |x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a| dx$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題5.

次の等式が成り立つとき、 a 、 b 、 c 、 d 、 e の各文字が表す数を求めなさい。ただし、各文字は1、2、3、4、5のいずれかで、同じ文字は同じ数を、異なる文字は異なる数を表します。

$$(a - b)(100c^2 + 20cd + d^2 + e^2) = 914$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題6.

a, b を実数とします。次の極限值を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ (x^3 + ax^2 + bx)^{\frac{1}{3}} - x \}$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第 7 回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 7.

$0 \leq \theta < 2\pi$ とします。 $\cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos \theta = 0$ であるとき、 $\cos 4\theta$ のとり得る値をすべて求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題8.

次の定積分を求めなさい。ただし、 e は自然対数の底を表します。

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log_e x}$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題9.

複素数平面上の2点 $A(1+2i)$, $B(4+3i)$ に対して, $AB:BC:CA=2:1:\sqrt{3}$ を満たすように点 C をとります。このとき, 点 C を表す複素数をすべて求めなさい。ただし, i は虚数単位を表します。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 10.

x に関する不等式 $\sqrt{2-x} > ax + b$ の解が $1 < x \leq 2$ となるための, a, b に関する必要十分条件を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 11.

In the first four papers of 100 marks each, Caroline got 95, 72, 73 and 83 marks. If she wants an average of greater than or equal to 75 marks and less than 80 marks, find the range of marks she should score in the fifth paper. Let x be the score in the fifth paper.

※You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 12.

Find the roots of the quadratic equation $x^2 - 6x + k = 0$ if one root is three times the other, where k is a constant. Find also the value of k .

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝
問題 13.

A convex polygon has 44 diagonals. Find the number of its sides.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 14.

$\triangle ABC$ has sides of lengths 3, 4 and 5. P is a point within the triangle for which $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$. The distances from P to A, B and C are l , m and n , respectively. Find the value of $l^2 + m^2 + n^2$.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園 2014 第7回全国数学選手権大会 準々決勝

問題 15.

How many zeroes are there at the end of $25!$? Note that the exclamation point “!” is used to designate factorial.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.