

スターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 3)

一ツ葉高等学校 数学科教諭
大津 光司

1 はじめに

スターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 2) では, ウォリスの公式を用いたガウス積分の証明および正規分布の諸性質について記述した. 今回はスターリングの公式の証明をした後, ド・モアブル-ラプラスの定理 (二項分布の正規近似) について記述する.

2 ド・モアブル-ラプラスの定理

2.1 スターリングの公式

定義 2.1 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対し, 次を満たすとき $a_n \approx b_n$ とかく.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

前回のスターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 2) で述べた実数の連続性 (上に有界な単調増加数列は収束する) の言い換え (同値な公理) として次がある.

公理 2.2 (実数の連続性) 下に有界な単調減少数列は収束する.

補題 2.3 [6] 数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める.

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

このとき, $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ である.

証明

すべての自然数 n において, $a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n > 0$ より, $\{a_n\}$ は下に有界である.

次に $\{a_n\}$ が単調減少数列であることすなわち $a_n > a_{n+1}$ を示すため, $\log \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > 0$ が成立することを示す.

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) &= \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right\} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

ここで $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ とおく.

$$f'(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

$x \geq 1$ において $f''(x) > 0$ であるため, $f'(x)$ は単調増加. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ であるので, $f'(x) < 0$ となることがわかる.*¹ したがって, $f(x)$ は単調減少である. また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{2} \log 1 + \log e - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので, $x \geq 1$ において $f(x) \geq 0$ であることがわかる.*²

以上より, $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であるため収束する.

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ であることを示す.

$g(x) = \frac{1}{4x(x+1)} - f(x)$ とおく. このとき

$$g'(x) = \frac{4x^3 + 6x^2 - 1}{4x^2(x+1)^2} - \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$g''(x) = \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}{2x^3(x+1)^3}$$

$x \geq 1$ において, $g''(x) > 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ であるので, $g'(x) < 0$ である.*²

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4x(x+1)} - \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 \right\} \\ &= 0 - \log e - 0 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるので, $x \geq 1$ において $g(x) > 0$ であることがわかる.*²

したがって, すべての自然数 n において次の不等式が成立する.

$$\log \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) < \frac{1}{4n(n+1)}$$

*¹ 3補題 3.1

*² 3補題 3.2

また,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \log \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} (\log a_k - \log a_{k+1}) \\
&= \log \left(\frac{a_1}{a_n} \right) \\
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\
&< \log e^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

であることから, $\frac{a_1}{a_n} < e^{\frac{1}{4}}$ がわかる. ここで $a_1 = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ であるので, $a_n > \frac{e^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2\pi}}$ が成立するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ である. ■

命題 2.4 [6]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n = 1$$

証明

$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n$ とおく. 補題 2.3 より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する. この極限値を A とおく. すなわち, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ とする. ウォリスの公式より

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)!} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} \\
&= A \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n 2\pi \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^{2n} \cdot \frac{2^{2n}}{(2n)!} \\
&= A^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi(2n)}} \left(\frac{e}{2n} \right)^{2n}} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= A^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= A\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

したがって, $A = 1$ であることがわかる. ■

定理 2.5 (スターリングの公式) [6]

$$\log n! \approx \frac{1}{2} \log (2\pi n) + n (\log n - 1)$$

証明

命題 2.4 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log n! - \log \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right\} = 0$$

である。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n!}{\log \left\{ \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\log n! - \log \left\{ \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right\}}{\log \left\{ \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right\}} + 1 \right] = 1$$

■

2.2 ド・モアブル-ラプラスの定理の証明

補題 2.6 [6]

$$\log \left\{ \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \right\} \approx \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{n}{2\pi k(n-k)} \right\} - (n-k) \log \frac{n-k}{n(1-p)} - k \log \frac{k}{np}$$

証明

スターリングの公式 (定理 2.5) より

$$\begin{aligned} \log \left\{ \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \right\} &= \log n! - \log(n-k)! - \log k! + k \log p + (n-k) \log(1-p) \\ &\approx \left\{ \frac{1}{2} \log(2\pi n) + n(\log n - 1) \right\} - \left[\frac{1}{2} \log \{2\pi(n-k)\} + (n-k) \{ \log(n-k) - 1 \} \right] \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} \log(2\pi k) + k(\log k - 1) \right\} + k \log p + (n-k) \log(1-p) \\ &= \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{n}{2\pi k(n-k)} \right\} - (n-k) \log \frac{n-k}{n(1-p)} - k \log \frac{k}{np} \end{aligned}$$

■

$Y = X - np$ と変数変換を行い, $X = k$ のとき $Y = y$ とする.

$$\begin{aligned} (n-k) \log \frac{n-k}{n(1-p)} &= \{n(1-p) - y\} \log \frac{n(1-p) - y}{n(1-p)} \\ &= n(1-p) \left[1 - \frac{y}{n(1-p)} \log \left\{ 1 - \frac{y}{n(1-p)} \right\} \right] \\ k \log \frac{k}{np} &= (y + np) \log \frac{y + np}{np} \\ &= np \left(1 + \frac{y}{np} \right) \log \left(1 + \frac{y}{np} \right) \end{aligned}$$

補題 2.7

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1-t)}{-t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4} = 1$$

証明

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1-t)}{-t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\log\left\{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\right\}}{-1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3} \\ &= \frac{-\log e}{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

■

$t = \frac{y}{n(1-p)}$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$ であるので, 次が成立する.

$$\log\left\{1 - \frac{y}{n(1-p)}\right\} \approx -\left\{\frac{y}{n(1-p)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{y}{n(1-p)}\right\}^2 - \frac{1}{3}\left\{\frac{y}{n(1-p)}\right\}^3 - \frac{1}{4}\left\{\frac{y}{n(1-p)}\right\}^4$$

補題 2.7 と同様にして, 次が成立する.

補題 2.8

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(1+s)}{s - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{4}s^4} = 1$$

$s = \frac{y}{np}$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $s \rightarrow 0$ であるので, 次が成立する.

$$\log\left(1 + \frac{y}{np}\right) \approx \left(\frac{y}{np}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{np}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{np}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{np}\right)^4$$

命題 2.9 上の条件のもと, 次が成立する.

$$n(1-p) \left[1 - \frac{y}{n(1-p)} \log\left\{1 - \frac{y}{n(1-p)}\right\}\right] + np \left(1 + \frac{y}{np}\right) \log\left(1 + \frac{y}{np}\right) \approx \frac{y^2}{2np(1-p)}$$

証明

$$\begin{aligned}
n(1-p) \left[1 - \frac{y}{n(1-p)} \log \left\{ 1 - \frac{y}{n(1-p)} \right\} \right] &\approx n(1-p)(1-t) \left(-t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right) \\
&= n(1-p) \left(-t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{4}t^5 \right) \\
&= -y + \frac{y^2}{2n(1-p)} - \frac{y^3}{6\{n(1-p)\}^2} + \frac{y^4}{12\{n(1-p)\}^3} + \frac{y^5}{4\{n(1-p)\}^4} \\
\\
np \left(1 + \frac{y}{np} \right) \log \left(1 + \frac{y}{np} \right) &\approx np(1+s) \left(s - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{4}s^4 \right) \\
&= np \left(s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{12}s^4 - \frac{1}{4}s^5 \right) \\
&= y + \frac{y^2}{2np} - \frac{y^3}{6(np)^2} - \frac{y^4}{12(np)^3} - \frac{y^5}{4(np)^4} \\
\\
(\text{左辺}) &\approx -y + \frac{y^2}{2n(1-p)} - \frac{y^3}{6\{n(1-p)\}^2} + \frac{y^4}{12\{n(1-p)\}^3} + \frac{y^5}{4\{n(1-p)\}^4} \\
&\quad + y + \frac{y^2}{2np} - \frac{y^3}{6(np)^2} - \frac{y^4}{12(np)^3} - \frac{y^5}{4(np)^4} \\
&= \frac{y^2}{2np(1-p)} - \frac{(2p^2 - 2p + 1)y^3}{6n^2p^2(1-p)^2} + \dots \\
&\approx \frac{y^2}{2np(1-p)}
\end{aligned}$$

■

補題 2.10 これまでの条件のもと，次が成立する．

$$\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{n}{2\pi k(n-k)} \right\} \approx \frac{1}{2} \log \frac{1}{2\pi np(1-p)}$$

証明

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{n}{2\pi k(n-k)} \right\}}{\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{1}{2\pi np(1-p)} \right\}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left\{ \frac{n}{2\pi(y+np)\{n(1-p)-y\}} \right\}}{\log \left\{ \frac{1}{2\pi np(1-p)} \right\}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n - \log 2\pi - \log(y+np) - \log n(1-p) - y}{-\log 2\pi p(1-p) - \log n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n - \log 2\pi - \log \left(\frac{y}{n} + p \right) - \log \left\{ (1-p) - \frac{y}{n} \right\}}{\log 2\pi p(1-p) + \log n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\log 2\pi}{\log n} - \frac{\log \left(\frac{y}{n} + p \right)}{\log n} - \frac{\log \left\{ (1-p) - \frac{y}{n} \right\}}{\log n}}{\frac{\log 2\pi p(1-p)}{\log n} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

定理 2.11 (ド・モアブル-ラプラスの定理) [6] 確率変数 X が二項分布 $\mathcal{B}(n, p)$ に従うとし, $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ とおくと, 次が成立する.

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

証明

$$\begin{aligned} \log P(X = k) &\approx \frac{1}{2} \log \frac{1}{2\pi np(1-p)} - \frac{y^2}{2np(1-p)} \\ \mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)} &\text{であるので} \\ P(X = k) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \end{aligned}$$

■

3 補遺

関数の極限に関する 2 つの補題 3.1 および補題 3.2 を $\varepsilon - \delta$ 論法 (イプシロン-デルタ論法) を用いて証明する.

任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して, $x > \delta$ であるすべての x について $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ となるとき, 関数 $f(x)$ は $x \rightarrow \infty$ で α に収束するといいい, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と表す.

補題 3.1 単調増加な関数 $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を満たすとき, 任意の実数 t に対し $f(t) < 0$ が成立する.

証明

背理法により証明する. $f(s) > 0$ を満たす実数 s が存在すると仮定する. この実数 s を固定し, $\varepsilon = f(s)$ とおく. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ であるので, ある正の実数 δ が存在して, $t > \delta$ であるすべての t について $|f(t) - 0| < \varepsilon$ が成立する. ここで $s < t$ かつ $\delta < t$ となるような実数 t をとると, $f(t) \leq |f(t) - 0| < \varepsilon = f(s)$ となる. すなわち, $s < t$ を満たす実数において $f(s) > f(t)$ が成立する. これは関数 $f(x)$ の単調増加性に矛盾する. ■

また, 次の補題も同様に成立する.

補題 3.2 単調減少な関数 $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を満たすとき, 任意の実数 t に対し $f(t) > 0$ が成立する.

参考文献

- [1] 加藤文元. 大学教養微分積分. 数研出版株式会社, 2020, [数研講座シリーズ].
- [2] 文部科学省. “高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編 平成 30 年 7 月”. 文部科学省ホームページ. 2023.
https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf,

- [3] 塩崎勝彦. “塩崎勝彦 還暦記念本「数楽しませんか？」”. 2013.
<https://www.fdiary.net/sugaku/sugaku.pdf>.
- [4] 数学の景色運営. “ガウス積分のさまざまな形とその証明 5 つ”. 数学の景色. 2022.
<https://mathlandscape.com/gauss-integral/>,
- [5] 難波博之. “ウォリスの公式とその 3 通りの証明”. 高校数学の美しい物語. 2023.
<https://manabitimes.jp/math/760>,
- [6] 難波博之. “スターリングの公式とその証明”. 高校数学の美しい物語. 2022.
<https://manabitimes.jp/math/763>,
- [7] ヤマガタ. “二項分布の近似としての正規分布”. 高校物理の備忘録. 2016.
<https://physnotes.jp/2016-06-17/>,