

スターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 2)

一ツ葉高等学校 数学科教諭
大津 光司

1 はじめに

スターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 1) では, 二項分布の基本的な性質およびネイピア数 (自然対数の底) の定義を記述した. 今回はウォリスの公式を用いてガウス積分の証明および正規分布の諸性質について記述する.

2 ガウス積分

正規分布の確率密度関数の満たす性質, 平均, 分散などを求める際に必要となるガウス積分の証明を行う.

2.1 ウォリスの積分公式

定義 2.1 (二重階乗) 自然数 n に対し, n の二重階乗を次のように定める.

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 3\cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n(n-2)\cdots 4\cdot 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

定理 2.2 (ウォリスの積分公式) 自然数 n に対し, 次の等式が成立する.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

証明

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおく.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\ &= [\sin x \cos^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

より, $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$ を得る. ここで

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$$

であるので, n が奇数のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

n が偶数のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおく.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x dx \\ &= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1)(J_{n-2} - J_n) \end{aligned}$$

より, $J_n = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}$ を得る. ここで

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

したがって, I_n の場合と同様に成立する. ■

2.2 ウォリスの公式

定理 2.3 (ウォリスの公式) [5] 次の等式が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi}$$

証明

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $0 < \sin x < 1$ より

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

各辺 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で定積分すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

ウォリスの積分公式 (定理 2.2) を用いることにより

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

各辺 $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}$ をかけることにより

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2n}{2n+1} \leq n \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 \leq \frac{1}{\pi}$$

ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{\pi}$$

であるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 = \frac{1}{\pi}$$

を得る。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi}$$

が成立する。 ■

2.3 ガウス積分の証明の準備

補題 2.4 [4] $0 < t < 1$ とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$1+t \leq e^t \leq \frac{1}{1-t}$$

証明

$f(t) = e^t - (1+t)$ とおく。 $f'(t) = e^t - 1$ より、 $0 < t < 1$ において $f'(t) > 0$ となることがわかる。 また $f(0) = 0$ であるので、 $0 < t < 1$ のとき $f(t) > 0$ すなわち $1+t \leq e^t$ が成立する。

$g(t) = \frac{1}{1-t} - e^t$ とおく。 $g(t) = \frac{1-(1-t)e^t}{1-t}$ である。 ここで、 $h(t) = 1-(1-t)e^t$ とおくと $0 < t < 1$ において $g(t)$ と $h(t)$ の正負は一致する。 $h'(t) = t \cdot e^t$ より、 $0 < t < 1$ において $h'(t) > 0$ となることがわかる。 また $h(0) = 0$ より、 $0 < t < 1$ のとき $h(t) > 0$ であるので $g(t) > 0$ すなわち $e^t \leq \frac{1}{1-t}$ が成立する。 ■

補題 2.5 [4] n を自然数とする。次の不等式が成立する。

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

証明

$0 < x < 1$ のとき、 $0 < x^2 < 1$ である。 補題 2.4において、 $t = x^2$ として適用すると次が成立する。

$$1+x^2 \leq e^{x^2} \leq \frac{1}{1-x^2}$$

各辺逆数を取り、さらに n 乗することにより、次の不等式を得る。

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

各辺 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で定積分すると、求めたい不等式を得る。 ■

命題 2.6 [4] n を自然数とする。次の不等式が成立する。

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta < \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt < \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} \theta d\theta$$

証明

補題 2.5 より,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

左辺において, $x = \sin \theta$ と置換すると

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta$$

また中辺において, $t = \sqrt{n}x$ と置換すると

$$\int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$

また右辺において, $x = \tan \theta$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta$$

ここで $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ より $\cos^{2n-2} \theta \leq \cos^{2n-3} \theta$ であるので

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} \theta d\theta$$

となることがわかる. したがって次が成立する.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta < \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} \theta d\theta$$

各辺 $\sqrt{n}$ をかけると, 求めたい不等式を得る. ■

2.4 ガウス積分の証明

関数 $f(x)$ が実数全体上の連続関数であるとき, 実数 c に対して極限值 $\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx$ が存在するとき, 次のように広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を定義することができる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx$$

定理 2.7 (ガウス積分) [4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

証明

e^{-x^2} は偶関数であるので、次の等式が成立することを示せばよい.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

命題 2.6 より

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta < \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt < \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} \theta d\theta$$

であるので、ウォリスの積分公式 (定理 2.2) より

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta &= \sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-3} \theta d\theta &= \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-4)!!}{(2n-3)!!} \end{aligned}$$

また、ウォリスの公式 (定理 2.3) から次がわかる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n}{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-4)!!}{(2n-3)!!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n \cdot (2n-1)}{(2n-2) \cdot 2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

したがって、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

となることがわかる. ■

3 正規分布の諸性質

正規分布の確率密度関数が満たす性質および (標準) 正規分布の平均と分散をガウス積分を用いて求める.

3.1 確率密度関数が満たす性質

確率変数 X が連続的な値をとるとき、 $a \leq X \leq b$ となる確率 $P(a \leq X \leq b)$ が、 $f(x) \geq 0$ である関数 $f(x)$ を用いて $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ となるとき、この $f(x)$ を確率密度関数という. 確率変数の取りうる範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ ならば $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 1$ 、 X がすべての実数値をとるならば $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$ である.

命題 3.1 μ を実数、 σ を正の数とする. このとき、次が成立する.

$$(i) \quad \text{任意の実数 } x \text{ において, } \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \geq 0 \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

証明

任意の実数 t において, $e^t \geq 0$ であるので, 任意の実数 x に対し $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \geq 0$ が成立する.

$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ と置換し, ガウス積分より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \\ &= 1\end{aligned}$$

■

3.2 標準正規分布の平均と分散

確率変数 X が連続的な値をとり, X のとりうる範囲 $a \leq X \leq b$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, 確率密度関数を $f(x)$ とする. このとき, X の平均 $E(X)$ を次で定める.

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

また $E(X) = m$ とおく. X の分散 $V(X)$ を次で定める.

$$V(X) = \int_a^b (x - m)^2 \cdot f(x) dx$$

また,

$$\begin{aligned}V(X) &= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - 2m \int_a^b x \cdot f(x) dx + m^2 \int_a^b f(x) dx \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2\end{aligned}$$

したがって, 次の等式が成立することがわかる.

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

命題 3.2 (標準正規分布の平均と分散) 次の等式が成立する.

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \qquad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

証明

(i) を示す

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_s^0 \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-1 + e^{-\frac{s^2}{2}} \right) \\ &= -1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} + 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

より, 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ は存在し, その値は $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -1 + 1 = 0$

(ii) を示す

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

ここで, $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ とおくとガウス積分より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

3.3 正規分布の平均と分散

μ を実数, σ を正の数とする. 関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

このとき, 任意の実数 t に対し, 等式 $f(\mu+t) = f(\mu-t)$ が成立することがわかる.

命題 3.3 (正規分布の平均) μ を実数, σ を正の数とする. このとき, 次の等式が成立する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$

証明

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \end{aligned}$$

ここで, $x = 2\mu - t$ と置換すると

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) f(x) dx = - \int_{\mu}^{\infty} (t - \mu) f(2\mu - t) dt$$

$$f(2\mu - t) = f(\mu + (\mu - t)) = f(\mu - (\mu - t)) = f(t) \text{ より}$$

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) f(x) dx = - \int_{\mu}^{\infty} (t - \mu) f(t) dt$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx &= - \int_{\mu}^{\infty} (t - \mu) f(t) dt + \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

■

命題 3.4 (正規分布の分散) μ を実数, σ を正の数とする. このとき, 次の等式が成立する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

証明

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\left[-\sigma^2 (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \right) \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

■

定義 3.5 (正規分布) 確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとする.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ただし μ は実数, σ は正の数とする. このとき, X は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うといい, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ と表す. とくに $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のとき, 標準正規分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ という.

参考文献

[1] 加藤文元. 大学教養微分積分. 数研出版株式会社, 2020, [数研講座シリーズ].

- [2] 文部科学省. “高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編 平成 30 年 7 月”. 文部科学省ホームページ. 2023.
https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf,
- [3] 塩崎勝彦. “塩崎勝彦 還暦記念本「数楽しませんか？」”. 2013.
<https://www.fdiary.net/sugaku/sugaku.pdf>.
- [4] 数学の景色運営. “ガウス積分のさまざまな形とその証明 5 つ”. 数学の景色. 2022.
<https://mathlandscape.com/gauss-integral/>,
- [5] 難波博之. “ウォリスの公式とその 3 通りの証明”. 高校数学の美しい物語. 2023.
<https://manabitimes.jp/math/760>,
- [6] 難波博之. “スターリングの公式とその証明”. 高校数学の美しい物語. 2022.
<https://manabitimes.jp/math/763>,
- [7] ヤマガタ. “二項分布の近似としての正規分布”. 高校物理の備忘録. 2016.
<https://physnotes.jp/2016-06-17/>,