# スターリングの公式を用いた二項分布の正規近似 (その 1)

一ツ葉高等学校　数学科教諭
大津　光司

**概要**

本稿はド・モアブル-ラプラスの定理と呼ばれる二項分布の正規近似を高等学校数学 $+\alpha$ の範囲で理論的に扱うことを目的としている．高等学校統計学の基本的な内容からはじめ，ド・モアブル-ラプラスの定理の証明までをまとめた．

## 1　はじめに

教材研究という名目であらためて高等学校で学ぶ統計学に向き合うと，教科書にある「次のことが知られている」「一般に，次のことが成り立つ」のひとことで片づけられている公式や性質の扱われ方が気になる．実際に学習指導要領解説では次のように記述されている．
高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編 平成 30 年 7 月 (文部科学省) より引用

> 正規分布は，連続的な確率変数の分布であり，その定義には連続関数や積分の概念等が用いられるため，数学的に厳密に取り扱うことは高等学校数学の範囲の中では難しい．(中略) 正規分布は統計学において重要な役割を果たす．それゆえ，正規分布の定義や分布曲線を与える式などについては理論的な取扱いに深入りせず，具体的な例や実験などを通して，正規分布曲線の形や性質を理解できるようにすることが大切である．

そこで本稿では高等学校数学 $+\alpha$ の範囲で高等学校で学ぶ確率分布について理論的に扱うことを目的とし，二項分布および正規分布の基本的な性質からド・モアブル-ラプラスの定理と呼ばれる二項分布の正規近似の証明までをまとめた．本稿の構成は次のとおりである．

その 1
- 二項定理の証明
- 二項分布の確率関数および平均と分散
- 相加相乗平均の大小関係の証明
- ネイピア数の定義

その 2
- ウォリスの公式の証明
- ガウス積分の証明
- 正規分布の確率密度関数および平均と分散

その 3
- スターリングの公式の証明

- ド・モアブル-ラプラスの定理の証明

本稿作成において，高校物理の備忘録 [7]，高校数学の美しい物語 [5][6]，数学の景色 [4] などに掲載される数学記事を複数参考にした．

# 2　二項分布の諸性質

1 つの試行において，ある事象 $E$ が起こる確率を $p$ とする．すなわち，$P(E)=p,\ 0<p<1$．この試行を独立に $n$ 回だけ繰り返したとき，事象 $E$ の起こる回数を確率変数 $X$ とする．このとき $X$ は二項分布 $\mathcal{B}(n,p)$ に従うといい，$X$ が値 $k$ をとる確率 $P(X=k)$ は次のようになる．

$$P(X=k)={}_nC_k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

## 2.1　二項定理の証明

**補題 2.1**　$n$ を自然数，$k$ を 0 以上 $n$ 以下の整数とする．このとき，次の等式が成立する．

$${}_nC_{k-1}+{}_nC_k={}_{n+1}C_k$$

証明

$$\begin{aligned}
{}_nC_{k-1}+{}_nC_k&=\frac{n!}{(k-1)!\{n-(k-1)\}!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\times\left\{\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right\}\\
&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\times\frac{n+1}{k(n-k+1)}\\
&=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\
&={}_{n+1}C_k
\end{aligned}$$

■

**定理 2.2 (二項定理)**　$n$ を自然数とする．次の等式が成立する．

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\cdot x^k\cdot y^{n-k}$$

証明

数学的帰納法により示す．

$n=1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{1}{}_1C_k\cdot x^k\cdot y^{1-k}=x+y$$

より，成立する．

$n$ のとき成立すると仮定する．$n+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left({}_nC_{k-1} + {}_nC_k\right) \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + y^{n+1}
\end{aligned}
$$

補題 2.1より

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n+1}C_k \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

より，$n+1$ のときも成立する．

したがって，すべての自然数 $n$ について成立することがわかる． ■

## 2.2 確率関数が満たす性質

$X$ を確率変数とし，$X = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の値をとり，$X = x_k$ となる確率を $P\,(X=k)$ とする．$P\,(X=k)$ が次の性質をみたすとき，確率関数という．

(i) $0 \leqq P\,(X=k) \leqq 1$　　(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\,(X=k) = 1$

**命題 2.3**　$n$ を自然数，$k$ を $0$ 以上 $n$ 以下の整数とする．このとき，次が成立する．

(i) $0 \leqq {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \leqq 1$　　(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1$

証明

まず (ii) から示す．二項定理 (定理 2.2) より

$$
\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \{p + (1-p)\}^n = 1
$$

次に (i) を示す．すべての $k$ において，$0 \leqq {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ であるので，(ii) より

$$0 \leqq {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \leqq \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1$$

■

### 2.3 二項分布の平均と分散

$X$ を確率変数とし，$X = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の値をとるとする．このとき，確率変数 $X$ の平均 $E(X)$ を次のように定める．

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot P(X = x_k)$$

また，平均 $E(X) = m$ とおき，確率変数 $X$ の分散 $V(X)$ を次のように定める．

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} (x_k - m)^2 \cdot P(X = x_k)$$

また，

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 \cdot P(X = x_k) - 2m \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot P(X = x_k) + m^2 \sum_{k=0}^{n} P(X = x_k) \\ &= E\left(X^2\right) - 2m^2 + m^2 \\ &= E\left(X^2\right) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

したがって，次の等式が成立することがわかる．

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \{E(X)\}^2$$

**命題 2.4 (二項分布の平均)** 確率変数 $X$ が二項分布 $\mathcal{B}(n,p)$ に従うとき，$E(X) = np$

<u>証明</u>

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\{(n-1)-(k-1)\}!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}
\end{aligned}
$$

$l = k-1$ とおき，二項定理 (定理 2.2) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} &= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!\,\{(n-1)-l\}!} \cdot p^l \cdot (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \cdot \{p + (1-p)\}^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}
$$

■

**命題 2.5 (二項分布の分散)**　確率変数 $X$ が二項分布 $\mathcal{B}(n,p)$ に従うとき，$V(X) = np(1-p)$

<u>証明</u>

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \cdot {}_nC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1) \cdot p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\{(n-2)-(k-2)\}!} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + np
\end{aligned}
$$

ここで二項定理 (定理 2.2) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,\{(n-2)-(k-2)\}!} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{(n-2)-(k-2)} &= \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{l!\,\{(n-2)-l\}!} \cdot p^l \cdot (1-p)^{(n-2)-l} \\
&= \{p + (1-p)\}^{n-2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

であるので

$$
E\left(X^2\right) = n(n-1) \cdot p^2 + np
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - \{E(X)\}^2 \\
&= n(n-1) \cdot p^2 + np - (np)^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

■

# 3　ネイピア数の定義

ネイピア数はとある数列の極限値として定義される．実数の連続性公理から，その数列が収束することを示す．

## 3.1　相加相乗平均の大小関係

**定理 3.1** (相加相乗平均の大小関係)
$n$ を 2 以上の整数とする．$n$ 個の正の数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$ に対し，次が成立する．

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

等号が成立するのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき．

<u>証明</u>
(I)$n = 2$ のとき

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqq 0$$

より成立する．また $a_1 = a_2$ のとき等号成立．
(II)$n = k$ のとき成立すると仮定する．$n = k + 1$ のとき

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} - (k+1)\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}} \geqq 0$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} b_i &= \sqrt[k+1]{a_i} \qquad (1 \leqq i \leqq k) \\ x &= \sqrt[k+1]{a_{k+1}} \\ f(x) &= b_1^{k+1} + b_2^{k+1} + \cdots + b_k^{k+1} + x^{k+1} - (k+1) b_1 b_2 \cdots b_k x \end{aligned}$$

とおき，$x > 0$ において $f(x) \geqq 0$ であることを示す．

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) b_1 b_2 \cdots b_k$$

$f'(x) = 0$ となるのは，$x = \sqrt[k]{b_1 b_2 \cdots b_k}$ のときである．$\alpha = \sqrt[k]{b_1 b_2 \cdots b_k}$ とおくと

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= b_1^{k+1} + b_2^{k+1} + \cdots + b_k^{k+1} + \alpha^{k+1} - (k+1) b_1 b_2 \cdots b_k \alpha \\ &= b_1^{k+1} + b_2^{k+1} + \cdots + b_k^{k+1} - k\alpha^{k+1} \\ &= \left(b_1^{\frac{k+1}{k}}\right)^k + \left(b_2^{\frac{k+1}{k}}\right)^k + \cdots + \left(b_k^{\frac{k+1}{k}}\right)^k - k\left(b_1^{\frac{k+1}{k}}\right)^k \left(b_2^{\frac{k+1}{k}}\right)^k \cdots \left(b_k^{\frac{k+1}{k}}\right)^k \end{aligned}$$

ここで仮定から $f(\alpha) \geqq 0$ であることがわかる．したがって，$x > 0$ において $f(x) \geqq 0$ が成立し，等号成立は $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = x = \alpha$ のとき．すなわち $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ のときである．
(I)，(II) より，$n \geqq 2$ のすべての自然数 $n$ において成立する．■

## 3.2 ネイピア数の定義

**定義 3.2**
数列 $\{a_n\}$ が与えられたとする．ある正の定数 $M$ が存在して，すべての自然数 $n$ について $a_n \leqq M$ が成立するとき，数列 $\{a_n\}$ は上に有界という．また，ある定数 $m$ が存在して，すべての自然数 $n$ について $a_n \geqq m$ が成立するとき，数列 $\{a_n\}$ は下に有界という．

**公理 3.3 (実数の連続性)** 上に有界な単調増加数列は収束する．

この公理は具体的な極限値がわからない数列についても，その収束する条件を与えている．

**補題 3.4** [3]
すべての自然数 $n$ において，次の不等式が成立する．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

<u>証明</u>
$n$ 個の $1+\dfrac{1}{n}$ と 1 に対し，相加相乗平均の大小関係 (定理 3.1) より，次が成立する．

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}$$

また $1+\dfrac{1}{n} \neq 1$ であり，等号成立条件を満たさないことから

$$1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

となる．これらの両辺を $n+1$ 乗することにより

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が成立することがわかる． ■

**補題 3.5**
すべての自然数 $n$ において，次の不等式が成立する．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

<u>証明</u>

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

ここで，$n \geqq 4$ において $n! \geqq 2^n$ すなわち $\dfrac{1}{n!} \leqq \dfrac{1}{2^n}$ が成立するので

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&< 1+\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&< 1+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}$$

■

以上より，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は，上に有界な単調増加数列であるので，収束することがわかる．その極限値をネイピア数 $e$ と定める．すなわち $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ である．

## 3.3 指数関数 $e^x$ の微分

数列の極限値として定義したネイピア数 $e$ は関数の極限としても表すことができる．

**命題 3.6**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

<u>証明</u>

$\displaystyle\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ が成立することを示せばよい．
$x > 0$ のとき，$x \to +0$ を考えるので $0 < x < 1$ としてよい．このとき，次を満たす自然数 $n$ が存在する．

$$1+\frac{1}{n+1} \leqq 1+x \leqq 1+\frac{1}{n}$$

$n \leqq \dfrac{1}{x} \leqq n+1$ であるので，次の不等式が成立する．

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ここで $x \to +0$ のとき，$n \to \infty$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ がわかる．
また，$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ であることもわかる．
$x < 0$ のとき，$s = -\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s}\\ &= \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{s-1}\right)^{s}\\ &= \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s-1}\right)^{s-1}\left(1+\frac{1}{s-1}\right) = e\end{aligned}$$

■

**命題 3.7**

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

証明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^x) &= \lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= e^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}\end{aligned}$$

ここで，$e^h - 1 = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ である．また $h = \log(k+1)$ であるので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} &= \lim_{k\to0}\frac{k}{\log(k+1)}\\ &= \lim_{k\to0}\left\{\log(k+1)^{\frac{1}{k}}\right\}^{-1}\\ &= 1\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ となることがわかる． ■

# 参考文献


[1] 加藤文元. 大学教養微分積分. 数研出版株式会社, 2020, [数研講座シリーズ].

[2] 文部科学省. “高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編 平成 30 年 7 月”. 文部科学省ホームページ. 2023.
https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf,

[3] 塩崎勝彦. “塩崎勝彦 還暦記念本「数楽しませんか？」”. 2013.
https://www.fdiary.net/sugaku/sugaku.pdf.

[4] 数学の景色運営. “ガウス積分のさまざまな形とその証明 5 つ”. 数学の景色. 2022.
https://mathlandscape.com/gauss-integral/,

[5] 難波博之. “ウォリスの公式とその 3 通りの証明”. 高校数学の美しい物語. 2023.
https://manabitimes.jp/math/760,

[6] 難波博之. “スターリングの公式とその証明”. 高校数学の美しい物語. 2022.
https://manabitimes.jp/math/763,

[7] ヤマガタ. “二項分布の近似としての正規分布”. 高校物理の備忘録. 2016.
https://physnotes.jp/2016-06-17/,