相愛数の背後にひそむ円

複素平面を学ぶ高校生のために

竹村　謙一
Independent Researcher (Tokyo, Japan)

概要

本稿では、複数の集合の累乗和が一定次数まで一致するとき、それらを「相愛数（Soaisu)」と呼び、その幾何学的背景を考察する。相愛数は、数論における古典的な Prouhet–Tarry–Escott（PTE）問題の整数性の制約を外し、複素数へと拡張した概念である。

本稿の主定理（正多角形の相愛定理）は、複素平面上の同一円に内接する二つの正 n 角形の頂点集合が強度 $n-1$ の n-n 相愛数をなすことを述べ、その証明を二項定理と 1 のべき乗根の性質のみを用いて与える。あわせて、強度の上限がちょうど $n-1$ となる理由が $k=n$ 乗における回転対称性の「破れ」として必然的に導かれることを示す。

さらに、ガウス整数格子上の相愛数が射影写像によって自然方陣上の整数相愛数へと変換されるメカニズムを解説し、自然数の相愛関係が複素平面の回転対称性を 1 次元に折りたたんだものであることを明らかにする。

議論は高校数学 C（複素数平面）の範囲で完結し、複素数という概念の拡張が恣意的なものではなく数の構造から要請される必然であることを、相愛数という具体的な例を通じて示す。

キーワード： 相愛数（Soaisu), Prouhet–Tarry–Escott 問題, べき和, 1 のべき乗根, 正多角形, 複素数平面, 数学教育

この記事について：本稿は、過去記事**「算数や数学の学習教材としての相愛数」**の発展編となります。主に数学教育に携わる皆様に向けて、相愛数の背後にひそむ数学的構造を詳らかにします。記事は高校数学（数学 C「複素数平面」）の基礎知識があれば、十分に読み解ける内容です。教室で生徒たちの探究心を刺激する「生きた数学」の題材としてご活用いただけたら幸いです。

1　奇妙な累乗和の一致

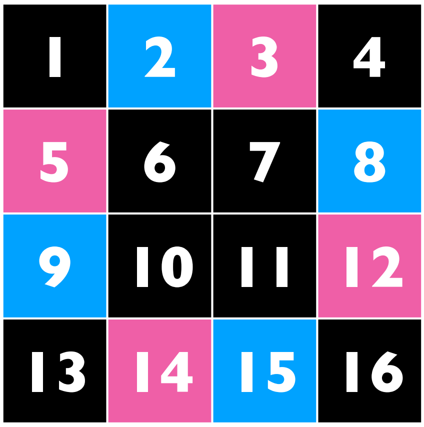

図1　自然方陣の中の 4-4 相愛数 ♡♡♡

まずは**4 次自然方陣**から話をはじめましょう。これは、1 から n^2（ここでは 16）までの連続する自然数を、正方形のマス目に左上から順に配置（行優先：row-major order）したものです。では、ここで 2 つの数の集合 A（ブルー）と B（ピンク）を取り出し、その累乗和を比較してみましょう。

$$A = \{2,\ 8,\ 9,\ 15\} \qquad B = \{3,\ 5,\ 12,\ 14\}$$

表1　集合 A, B における各次累乗和の計算結果

集合	1 乗和 $(\sum a)$	2 乗和 $(\sum a^2)$	3 乗和 $(\sum a^3)$	4 乗和 $(\sum a^4)$
A (ブルー)	**34**	**374**	**4624**	61298
B (ピンク)	**34**	**374**	**4624**	59858
判定	一致 (✓)	一致 (✓)	一致 (✓)	不一致 (×)

計算の結果、3 乗和までは完全に一致します。数たちの極めて強固で、美しい絆。この事実を知って目を輝かせる生徒は少なくないはずです。さて、しかし、ここでのもう一つの注目ポイントは、4 乗和でこの均衡が

突如として崩れてしまうということでしょう。なぜ 3 乗まで一致して、4 乗で崩れるのでしょうか？そこには何か数学的に説明できる理由があるのでしょうか?

2　相愛数とは何か

2.1　相愛数の定義

本格的な話を始める前に用語の説明を行っておきます。本稿では、前節で紹介したような累乗和が一致する数の集まりを**「相愛数（Soaisu）」**と呼ぶことにします。数学的には「多重集合（multiset)」の概念を用いて次のように定義されます（多重集合は、集合と異なり要素の重複を許容します)。

定義：相愛数（Soaisu）

m 個の多重集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m$（各要素数 n）に対し、$l = 1, 2, \ldots, k$ のすべてにおいて

$$\sum_{a \in S_1} a^l = \sum_{a \in S_2} a^l = \cdots = \sum_{a \in S_m} a^l$$

が成立するとき、これを**強度** k **の** $\underbrace{n\text{-}n\text{-}\cdots\text{-}n}_{m\text{個}}$ **相愛数**と呼ぶ。

本稿で提唱する「相愛数」の概念は、古典的な数論の Prouhet–Tarry–Escott 問題の枠組みを以下の 2 点において意図的に拡張しています。

1. **対象を複素数へ：**従来の PTE 問題は主に整数を対象としますが、相愛数では**複素数**まで対象を広げます。これにより、次節で述べる「平面上の幾何学的対称性」との接続が可能になります。
2. **多集団（m 個）への拡張：**通常の PTE 問題は 2 つの集合（$m = 2$）の比較に主眼を置きますが、相愛数では 3 つ以上のグループ間での一致も扱います。

強度は k は親しみをこめて $\heartsuit$ の個数で表すこともあります。例えば 1 乗から 3 乗までが一致すれば **相愛数** $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$ と表記します。

2.2　PTE 問題の理想解とは?

相愛数という概念は、数論における古典的な難問**「Prouhet–Tarry–Escott 問題（PTE 問題）」**に深く根ざしています。PTE 問題において、要素数 n に対して強度が $k = n - 1$ に達する非自明な解は**「理想解（Ideal Solution）」**と呼ばれています。

ここで、第 1 節で取り上げた事例を振り返ってみましょう。

$$A = \{2,\ 8,\ 9,\ 15\}, \quad B = \{3,\ 5,\ 12,\ 14\}$$

この二つの集合は、それぞれ $n = 4$ 個の要素を持っています。定義に従えば、理想解となるための強度は $k = n - 1 = 3$ です。

前述の通り、このペアは 1 乗和・2 乗和・3 乗和のすべてにおいて完全に一致しており、まさに強度が 3 であることを示しました。つまり、この **4-4 相愛数** $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$ は、PTE 問題における**理想解（Ideal Solution）**の極めて美しい具体例となっているのです。

- **補足**: 現在知られている最大の整数理想解は強度 11（12-12 相愛数）であり、強度 12 以上の理想解が存在するかどうかは、今なお数学界の**未解決問題**です。

2.3 教育的アプローチとしての「ネーミング」の重要性

「Prouhet–Tarry–Escott 問題」という名称は、発見者 (3 名) の貢献を讃えるのには適切かもしれませんが、内容を一切説明していません。専門家以外の一般の数学愛好家や生徒にとっては堅苦しく「自分とは無関係な歴史上の用語」に見えてしまいがちです。数学の歴史を振り返っても、「カオス理論」（非線形動力学）や「虚数」（Imaginary numbers）のように、少し情緒的、あるいは直感的な名前がついたことで、専門外の人々の想像力を刺激し、結果として分野への関心を広げた例も見られます。**相愛数**という用語も数たちが演じる対称性のドラマに「体温」を与え、生徒たちに「数にも相性や絆があるのかもしれない」と親しみをもってもらうことを意図しています。

3 円と回転の魔法

3.1 準備：1 のべき乗根と正多角形（1 の点を含む）

複素平面上の単位円（原点 O を中心とする半径 1 の円）を n 等分する点を **1 の n 乗根**と呼びます。$\omega = e^{2\pi i/n}\left(= \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$ とおくと、n 個の点は

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^{n-1}$$

と書け、これらは正 n 角形の頂点をなします（$n = 4$ ならば $\{1, i, -1, -i\}$）。

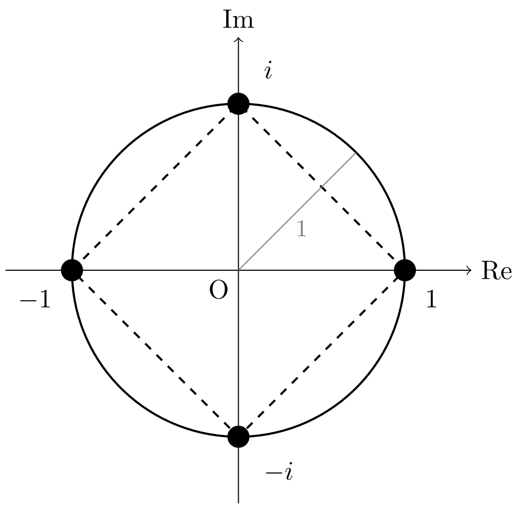

図2 単位円に内接する正方形（$n = 4$）。頂点 $\{1, i, -1, -i\}$ は 1 の 4 乗根。これら 4 点の k 乗和（$k = 1, 2, 3$）はすべて 0 になる。

$1 \le k \le n-1$ のとき $\omega^k \ne 1$ なので、等比数列の和の公式より

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \frac{1-(\omega^k)^n}{1-\omega^k} = \frac{1-1}{1-\omega^k} = 0$$

この「**1 の n 乗根の k 乗和は** 0 **（$1 \le k \le n-1$）**」という事実が、以下の定理の核心です。

3.2　正多角形の相愛定理

単位円から一般の円（中心・半径が任意）に話を広げます。

定理（正多角形の相愛定理）

複素平面上の円（中心 $c \in \mathbb{C}$、半径 $r > 0$）に内接する正 n 角形について頂点を表す複素数の集合を P とし

$$S_k(P) \;=\; \sum_{p \in P} p^k$$

と定める。P の各要素を e と θ を用いて $p_j = c + r\,e^{i(\theta + 2\pi j/n)}$ で表すとき

1. $1 \le k \le n-1$ に対して：　$S_k(P) = nc^k$　（θ に**依存しない**）
2. $k = n$ に対して：　$S_n(P) = nc^n + nr^n e^{in\theta}$　（θ に**依存する**）

系（相愛数の幾何的構成）：同一円に内接する異なる二つの正 n 角形 P, Q は、$1 \le k \le n-1$ のすべてで

$$S_k(P) = S_k(Q) = nc^k$$

を満たす。すなわち P と Q は**強度 $n-1$ の n-n 相愛数** をなす。

注： $P = Q$（二つの正 n 角形が完全に一致）のときは、すべての k で $S_k(P) = S_k(Q)$ が成立する。これは強度に上限のない**強度 ∞ の n-n 相愛数**であり、定理の系における「強度 $n-1$」は $P \neq Q$ の場合の上限を与えている。

定理のポイントを一言で言うと

強度の上限がちょうど $n-1$ である理由：
$k \le n-1$ では展開に現れる ω^{jl}（$l \ge 1$）の和がすべて 0 になり、θ が完全に消える。$k = n$ になると初めて $e^{in\theta}$ が残り、二つの正 n 角形の間で累乗和が食い違う。強度の上限は、回転対称性が「吸収できる次数の限界」そのものです。

3.3　証明

$p_j = c + z_j$（$z_j = r\,e^{i(\theta + 2\pi j/n)}$）とおく。二項定理より

$$p_j^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} c^{k-l} {z_j}^l$$

$j = 0, \ldots, n-1$ について和をとると

$$S_k(P) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} c^{k-l} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} {z_j}^l \right)}_{(*)}$$

$(*)$ を計算する。${z_j}^l = r^l e^{il\theta} \omega^{jl}$ なので

$$(*) = r^l e^{il\theta} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jl} = \begin{cases} n & (l = 0) \\ 0 & (1 \le l \le n-1) \\ n\, e^{in\theta}\, r^n / r^n \cdot r^n = nr^n e^{in\theta} & (l = n,\ \text{ただし} \omega^{jn} = 1) \end{cases}$$

$1 \le k \le n-1$ **の場合：** l の範囲は $0 \le l \le k \le n-1$ なので $(*) = 0$（$l \ge 1$）が成立し、$l = 0$ の項だけ残る。

$$S_k(P) = \binom{k}{0} c^k \cdot n = nc^k \qquad (\theta \text{ を含まない})$$

$k = n$ **の場合：** $l = n$ の項が加わり $(*) = nr^n e^{in\theta}$、よって

$$S_n(P) = nc^n + nr^n e^{in\theta}$$

$\theta \ne \theta'$ かつ $S_n(Q) = nc^n + nr^n e^{in\theta'}$ とおくとき、一般に $e^{in\theta} \ne e^{in\theta'}$ なので $S_n(P) \ne S_n(Q)$ □

3.4 $n = 4$ で確かめる

単位円（$c = 0, r = 1$）、$\theta = 0$ の正方形 $P = \{1, i, -1, -i\}$ を使います。

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad S_1 = 1 + i - 1 - i = 0 = 4 \cdot 0^1 \quad \checkmark \\ k = 2: &\quad S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 = 4 \cdot 0^2 \quad \checkmark \\ k = 3: &\quad S_3 = 1 - i - 1 + i = 0 = 4 \cdot 0^3 \quad \checkmark \\ k = 4: &\quad S_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 4 \cdot 0^4 + 4 \cdot 1^4 e^0 = 4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$k = 4$ では $S_4(P) = 4$。$\theta = \pi/4$ の正方形 $Q = \left\{ e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4} \right\}$ では

$$S_4(Q) = 4 \cdot 1^4 \cdot e^{i \cdot 4 \cdot \pi/4} = 4e^{i\pi} = -4$$

$S_4(P) = 4 \ne -4 = S_4(Q)$。記事冒頭の「3 乗まで一致して 4 乗で崩れる」謎は、これで完全に説明されました。

4 複素数から自然数へ——射影の魔法

4.1 複素平面上の 4×4 格子

次の 16 個のガウス整数（実部・虚部がともに整数の複素数）からなる 4×4 の格子点を考えます。

$$\{x + yi \mid x, y \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

この格子の中から、次の 2 つの集合を選びます。

$$A = \{1 + 3i,\ 3 + 2i,\ 2,\ i\}, \qquad B = \{2 + 3i,\ 3 + i,\ 1,\ 2i\}$$

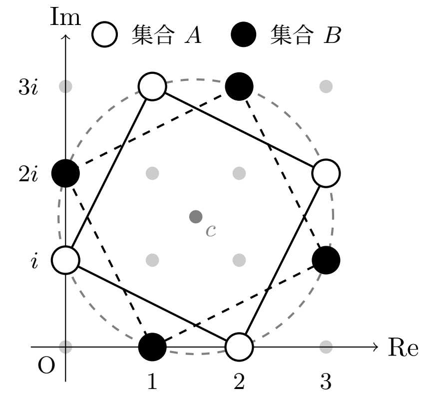

図3　4×4 のガウス整数。集合 A（白丸・実線）と集合 B（黒丸・破線）の各 4 点は、中心 $c = 1.5 + 1.5i$、半径 $r = \sqrt{2.5}$ の同一円周上に位置し、互いに異なる正方形の頂点をなす。

A と B はともに中心 $c = 1.5 + 1.5i$、半径 $r = \sqrt{2.5}$ の円に内接する正方形の頂点です。正多角形の相愛定理の系より、$n = 4$ として $k = 1, 2, 3$ のすべてで

$$S_k(A) = S_k(B) = 4c^k$$

が保証されます。実際に確認すると

$$\begin{aligned}
k = 1:\quad & S_1 = 4c = 4(1.5 + 1.5i) = 6 + 6i \quad \checkmark \\
k = 2:\quad & S_2 = 4c^2 = 4(1.5 + 1.5i)^2 = 4 \cdot 4.5i = 18i \quad \checkmark \\
k = 3:\quad & S_3 = 4c^3 = 4(1.5 + 1.5i)^3 = 4(-6.75 + 6.75i) = -27 + 27i \quad \checkmark
\end{aligned}$$

一方、$k = 4$ では定理より $S_4(P) = 4c^4 + 4r^4 e^{4i\theta}$ となり、θ が残ります。実際

$$\begin{aligned}
S_4(A) &= -74 + 24i, \\
S_4(B) &= -74 - 24i
\end{aligned}$$

であり、一致しません。3 乗まで一致して 4 乗で崩れることが実際に確かめられました。

4.2　射影──ガウス整数を自然数に変換する

いよいよ「複素数から自然数へ」の橋をかけます。次の写像を定義します。

写像：

$$\varphi:\ x+yi \longmapsto x+4y+1 \qquad (x,y\in\{0,1,2,3\})$$

例えば $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=2$, $\varphi(3+3i)=16$。4×4 格子点全体への φ の適用で、1 から 16 の自然数が過不足なく得られます。これを集合 A, B に φ を適用すると：

$$\varphi(A)=\{\varphi(1+3i),\ \varphi(3+2i),\ \varphi(2),\ \varphi(i)\}=\{14,\ 12,\ 3,\ 5\}$$
$$\varphi(B)=\{\varphi(2+3i),\ \varphi(3+i),\ \varphi(1),\ \varphi(2i)\}=\{15,\ 8,\ 2,\ 9\}$$

1 ページに提示した二つの集合が、まるで魔法のようにあらわれました!!

4.3 なぜ整数になるのか——「奇跡」ではなく必然

整数性が保たれる理由は二点あります。

（1）ガウス整数の線形性： $\varphi(x+yi)=x+4y+1$ は x と y（どちらも整数）を整数係数で足し合わせた式なので、格子点の像はつねに整数になります。

（2）相愛関係の保存：「相愛関係」とは、複数の集合が累乗和（1 乗、2 乗、$\cdots$）をすべて共有している関係のことです。この関係は、全要素を定数倍したり一定量だけずらしたりする操作（アフィン変換）のもとで壊れません。なぜかというと、第 3 節の証明で示したように、$(a+c)^k$ を二項定理で展開すると現れる係数はすべてもとの集合の累乗和だけに依存するからです。元の集合で累乗和が一致していれば、ずらした後も一致したままになります。

φ は「実部を 1 倍、虚部を 4 倍して足し合わせ、さらに 1 を加える」という操作なので、これもアフィン変換の一種です。よって複素平面上の相愛関係は φ による変換後も完全に維持されます。

全体の構造：

$$\underbrace{\text{同一円上に内接する二つの正方形}}_{\text{幾何}} \xrightarrow{\substack{\text{正多角形の}\\\text{相愛定理}}} \underbrace{A,\ B\ \text{は複素数の相愛数}}_{\text{代数}} \xrightarrow{\varphi} \underbrace{\{3,5,12,14\},\ \{2,8,9,15\}}_{\text{整数の相愛数}}$$

自然数の相愛数は、複素平面上の回転対称性を「1 次元に折りたたんだもの」です。

5 オープンクエスチョン——挑戦しがいのある問題

ここまでの議論を踏まえると、その発展として以下のような問いが自然に湧き上がってくるかもしれません。

チャレンジ問題 1

複素数の世界では任意の複素数 c と $r > 0$ を選べば、同一円に内接する**異なる**二つの正 n 角形から強度 $n-1$ の n-n 相愛数が**無条件に**得られる。（同一の正 n 角形を二つ選ぶ自明なケースは強度 ∞ の相愛数となる。）

整数の世界では：円と正 n 角形の配置を適切に選ぶことで、すべての頂点がガウス整数となる場合がある。$n = 4$ では 4 次自然方陣という格子がその役割を果たした。

未解決の問い：より大きな n において、同一円に内接する二つの正 n 角形の頂点がすべてガウス整数となるような配置が存在し、かつそこから適切な射影写像によってすべての元が実整数となる相愛数を構成できるか？

チャレンジ問題 2

定理は「正 n 角形ならべき和が一致する」と言っています。では**逆**はどうでしょうか？

逆問題：同一円周上にある n 点を要素にもつ集合 P が、$k = 1, 2, \ldots, n-1$ のすべてで $S_k(P) = nc^k$ を満たすならば、P は必ず正 n 角形の頂点をなすか？

答えは **YES** です。これは代数的に証明できます。以下のヒントに沿って自力で証明を構成してみましょう。

ヒント：

1. 中心を原点に移して $c = 0$、すなわち $S_1 = S_2 = \cdots = S_{n-1} = 0$ の場合を考える。
2. **ニュートン恒等式**を使うと、$S_1 = \cdots = S_{n-1} = 0$ から基本対称式 $e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 0$ が導かれる。（ニュートン恒等式は用語まとめを参照）
3. すると n 点は方程式 $z^n = C$（C はある複素定数）の根である。
4. $z^n = C$ の n 個の根は、大きさが等しく偏角が $\frac{2\pi}{n}$ ずつ等間隔に並ぶ。これが正 n 角形の定義そのものである。

数値でも確かめられます：単位円上のランダムな 4 点で $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ を満たすものを 100 万回探しても、見つかるのはつねに正方形です。プログラムが書ける人はぜひ試してみてください。

なぜ重要か：この逆問題が成立することで、「同一円上で相愛数をなす n 点を要素にもつ集合は、正 n 角形とその回転・鏡映に限られる」という**完全な幾何的特徴づけ**が得られます。

6　まとめ――数の海の深さ

相愛数の背後にあったのは、意外にも数学において最も基本的な図形の一つ、**円**でした。こうしてあらためて 4 次自然方陣における相愛数のポジションを眺めると、二つのグループが方陣の中心を軸にした**鏡像関係**にあることがわかります。この左右対称の美しさは偶然ではありません。

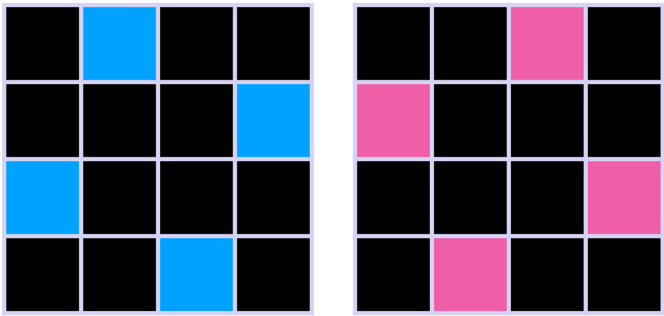

図4　自然方陣における 4-4 相愛数 ♡♡♡ ポジション

複素平面上では、二つの正方形が互いに鏡映（共役変換）の関係にあるとき、それぞれが同一円に内接する異なる正方形をなします。その幾何学的な対称性が、射影写像 φ によって自然方陣の上に「投影」されたとき、私たちが目にする鏡像の美しさが生まれるのです。1 から 16 という、誰もが幼い頃に出会う数たちの中にさえも、これほど精巧な対称構造を秘めていたという事実は、数学の持つ根源的な美しさの一端を示しています。

複素数への数の拡張は自然だった

高校で複素数を初めて学ぶとき、「$\sqrt{-1}$ という数を人間が勝手（人為的）に作った」という印象を持つ人は少なくないでしょう。虚数単位 i は、方程式 $x^2 = -1$ を解くための便宜的な発明のように見えるかもしれません。

しかし相愛数を通じて見えてきた事実は、それとは全く異なるものです。

自然数の中にひそむ相愛の構造を完全に理解しようとすると、私たちは必然的に複素平面へと導かれます。逆に言えば、複素平面という舞台があって初めて、自然数の相愛数が「なぜ存在するのか」「なぜ強度に上限があるのか」が明快に説明できるのです。

数の拡張（自然数 $\to$ 整数 $\to$ 有理数 $\to$ 実数 $\to$ 複素数）は、人間が恣意的に行ったものではありません。それはむしろ、数の世界が持つ深い構造が要請した、**自然な拡張**だったと言えるのではないでしょうか。

相愛数はその一つの証拠です。

この記事で扱った内容は、より広大な数学の入り口にすぎません。

正多角形の回転対称性は、**巡回群** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ という代数的構造と本質的に同じものです。「回転しても累乗和が変わらない」という性質は、群論の言葉では「群の作用に対する不変量」として定式化されます。

さらに、1 のべき乗根がもつこのような和の性質は、離散フーリエ変換（DFT）の基本的な構造と深く関係しており、信号処理や画像処理など現代の応用数学の基盤へとつながっています。

ニュートン恒等式は**対称多項式**の理論へ、そして対称多項式はガロア理論・表現論へと続く道を開きます。

相愛数から始まった旅は、探求心あふれる生徒たちを現代数学の広大な風景を見渡す場所へと導いてくれることでしょう。

数学教育の観点から

相愛数は、次の意味で**理想的な数学教材**になり得ると確信しています。

- **動機づけが自然：** 1 から 16 という馴染みある数の中に「謎」が潜んでいる。導入は理解しやすく、学習者は参加しやすい。
- **道具がシンプル：**二項定理・等比数列の和・複素数の極形式——すべて高校数学 C の範囲で定理を証明できる。難しい道具を使わずに深い結果が得られる。
- **複素数の必然性を実感できる：**「なぜ複素数を学ぶのか」という問いに対して、相愛数は一つの説得力ある答えを与えます。複素平面を使うと、それまで謎だった現象が鮮やかに説明される体験は、虚数の存在が「必然」であることを肌で感じさせます。
- **発展の余地が豊富：**逆問題・PTE 問題・群論・フーリエ解析など、関心や習熟度に応じて探究を深められる。高校生から数学専攻の大学生まで、幅広い層にリーチ可能。計算の練習としてではなく、「数とは何か」という本質を問う契機として、相愛数は機能します。

数は単なる計算の道具ではありません。1 から 16 というごく普通の数たちが、円という普遍的な幾何と深く結びついていた——。この事実を知り、数学を愛するすべての人が、数の世界の豊かさと美しさを少しでも感じ取ってくれることを願っています。

用語まとめ

相愛数（Soaisu）	複数の集合が 1 乗、2 乗、$\cdots$ の累乗和をすべて共有しているとき、それらを相愛数と呼ぶ
強度 k	1 乗から k 乗まで和が一致すること。♡ の個数で表す
相愛関係	複数の集合が相愛数の関係にあること。アフィン変換（平行移動・スケーリング）のもとで保存される
理想解	n 元集合で強度が最大値 $n-1$ に達したもの
PTE 問題	整数からなる理想解を探す古典的な未解決問題
ガウス整数	実部・虚部がともに整数の複素数全体 $\mathbb{Z}[i]$
1 の n 乗根	$e^{2\pi ik/n}$（$k=0,\ldots,n-1$）。単位円上の正 n 角形の頂点をなす
写像	ある集合の各要素に別の集合の要素を対応させる規則。φ は複素数を整数に対応させる写像
線形結合	複数の量を定数倍して足し合わせた式。例：$x+4y$ は x と y の線形結合
アフィン変換	$f(z)=dz+c$（d, c は定数）の形の変換。平行移動・回転・拡大縮小が含まれる。相愛関係は、このような変換のもとでも保たれる性質をもつ
線形写像	アフィン変換のうち $c=0$ の場合（$f(z)=dz$）。スケーリングと回転のみからなる

参考文献

[1] Kenichi Takemura (2026)「The Magic of a 12-12-12 Split: Discovering Soaisu (6 次自然方陣における相愛数 ♡♡♡ による均等 3 分割)」『Math Horizons』Vol.33, No.3, pp.21–23.
DOI: 10.1080/10724117.2025.2578498

[2] Kenichi Takemura (2026) "The beautiful soaisu partition," *Chalkdust Magazine*, Issue 23 (19 April 2026). https://chalkdustmagazine.com/features/the-beautiful-soaisu-partition/