算数や数学の学習教材としての相愛数

Kenichi Takemura

身近な数に秘められた美しい対称性

数学や算数の授業で「数」を扱うとき、私たちはそれを単なる計算の練習材料としてのみ、扱ってしまいがちです。しかし、数というのは本来、神秘的な存在です。このありふれた数の並びの中にも、じつは驚くほど強固で美しい「絆」で結ばれてるものたちが存在しています。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図1　4 次自然方陣

ここには 1 から 16 までの連続する自然数が正方形の 16 個のマスの中に順に並んでいます。このように、1 から n^2 までの連続する自然数を、空きなく、重複なく、行優先（左から右、上から下へ）で配置した $n \times n$ の正方形の配列を n **次自然方陣**と呼ぶことにしましょう。

4 次自然方陣と不思議な 8 つの数

では 4 **次自然方陣**の中にひそむ次の 8 つの数に注目してみることにしましょう。

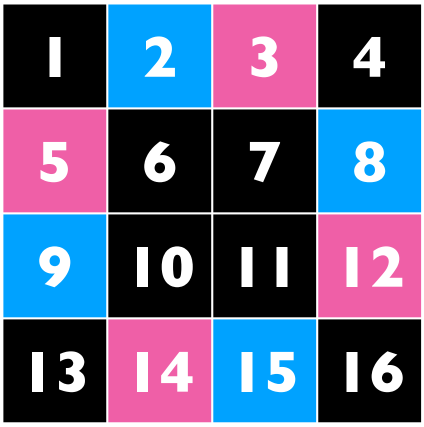

図2　ブルーとピンクのグループの正体は?

- **ブルーグループ** (S_B)**:** $\{2, 8, 9, 15\}$
- **ピンクグループ** (S_P)**:** $\{3, 5, 12, 14\}$

いったい、これらのグループの特徴は何でしょうか？なぜ、ブルーとピンクの 2 色に塗り分けられているのでしょうか？その理由は、これら 4 つの数の総和をとってみることでわかります。

$2 + 8 + 9 + 15 = 34$
$3 + 5 + 12 + 14 = 34$　**...一致**

両グループ、ともに 34 でぴったりと一致しています。いいえ、それればかりではありません。ここで各数をそれぞれ 2 乗してから総和をとってみても、

$2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2 = 4 + 64 + 81 + 225 = 374$
$3^2 + 5^2 + 12^2 + 14^2 = 9 + 25 + 144 + 196 = 374$　**...一致**

あるいは、各数を 3 乗してから総和をとっても、

$2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3 = 8 + 512 + 729 + 3375 = 4624$
$3^3 + 5^3 + 12^3 + 14^3 = 27 + 125 + 1728 + 2744 = 4624$　**...一致**

どうでしょう。ブルーグループとピンクグループで累乗総和は完全に一致しています。

そう、これが数を愛するすべての人たちに知ってもらいたい、**4–4 相愛数** ♡♡♡ というものなのです。

相愛数（Soaisu）とは何か？

さて、このように、1 乗から k 乗までの和がすべて一致する数たちを、私は親しみを込めて**「相愛数 (Soaisu)」**と呼んでいます。この「k」の値を相愛数の「強度」と呼び、♡ の数で表します。今回の例では 1 乗から 3 乗までが一致 (4 乗総和は一致しません) したため、**4–4 相愛数** ♡♡♡ となります。数学の記号を使って表現すると、次のようになります。

集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m$（各々 n 個の整数）が、$l = 1, 2, \ldots, k$ に対して以下を満たすとき、**強度** k **の** $\underbrace{n\text{-}n\text{-}\cdots\text{-}n}_{m\text{個}}$ **相愛数**という。

$$\sum_{a \in S_1} a^l = \sum_{a \in S_2} a^l = \cdots = \sum_{a \in S_m} a^l$$

相愛数は，2 つの集合のべき乗和が等しくなる条件を探る古典的な「Prouhet–Tarry–Escott 問題」を、より多くの数学愛好家たちに知ってもらたいと思って命名した筆者の造語であり、日本語の「相愛（soai）」という言葉に由来します。これには「互いに慈しみ愛し合う」といった意味があります。発音は「soh-eye-su（ソー・アイ・ス)」です。最後の「su」は、「zoo」のような濁る音ではなく、「sushi（寿司)」の「ス」のように発音してください。表記については、文中で一般用語として使用する場合は、略語（アクロニム）と間違われないようにすべて小文字（**soaisu**）にすることにしています。文頭やタイトルなどでは、英語のルールに従って最初の文字を大文字（**Soaisu**）にします。

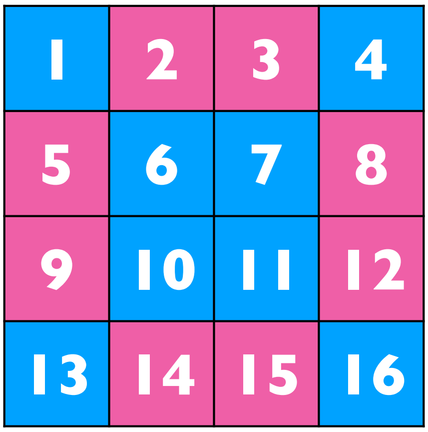

図3　8–8 相愛数 ♡♡♡

さて、本当に驚くべきは 4 次自然方陣の中にはこのような形式で 8–8 相愛数 ♡♡♡ が組み込まれているということでしょう。わかりますか？これらブルーの 8 数とピンクの 8 数においてもなんと 1 から 3 乗数総和にいたるまでピッタリ一致する関係にあるのです。

ブルーグループ（対角線上の 8 数）: {1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16}
ピンクグループ（それ以外の 8 数）: {2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15}

表1　ブルーとピンクにおける累乗数総和の比較（8–8 相愛数）

グループ	1 乗和	2 乗和	3 乗和	4 乗和
ブルー	**68**	**748**	**9,248**	122,692
ピンク	**68**	**748**	**9,248**	121,156

1 から 16 までの連続する自然数が相愛数によって均等 2 分割されうるという事実はほとんど知られていないことでしょう。これは信じられないくらい、もったいないことです。小学生や中学生にとって、数が自らつくりだすシンメトリックな柄、また目で見える美しさと計算で導き出される結果がリンクする体験は、一生忘れられない記憶となるはずです。とりわけ数に対する感覚がするどい子供達たちであれば、この事実を一目見るやいなや、この背後にはもっと奥が深い数学が隠れているだろうことを直感するはずです。「なぜ、このようにシンプルな方陣の中に、かくも美しい形式で相愛数が組み込まれているのか？」という問いは、子供たちを「公式の暗記」から「構造の探究」へと誘います。

教育現場での活用: 相愛数を探せ!!

教室では、実際に電卓を使って累乗和を計算させ、「どこで絆が途切れるか」を体験させるのもおもしろいでしょう。きっと子供たちは「相愛数」探しに夢中になるはずです。実際に 4 次自然方陣の中にはまだまだ数多くの **4–4 相愛数** ♡♡♡ が身を隠しており、それを全部特定させるのはとてもエキサイティングな挑戦になるでしょう。中学生以上であれば、python でプログラムを組む格好の練習になるかもしれません。

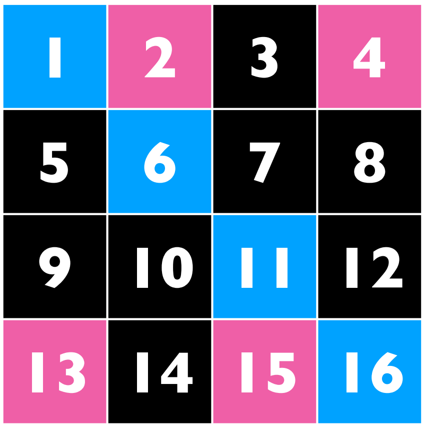

図4　別種の 4–4 相愛数 ♡♡♡

おわりに

これまで見てきた「相愛数」は、単なるパズルやレクリエーション数学の枠にとどまるものではありません。それは、整数論における古典的な難問「Prouhet–Tarry–Escott（PTE）問題」への扉であると同時に、対称

表2　ブルーとピンクにおける累乗数総和の比較（4–4 相愛数）

グループ	1 乗和	2 乗和	3 乗和	4 乗和
ブルー $(1, 6, 11, 16)$	**34**	**414**	**5,644**	81,474
ピンク $(2, 4, 13, 15)$	**34**	**414**	**5,644**	79,458

性を探究する群論や組み合わせ論といった、より高度な数学の広大な世界への入り口でもあります。

この探索の過程で、児童・生徒は知らず知らずのうちに『数の組み合わせの対称性』や『二項展開の性質』といった、背景に潜む数学的構造に触れることになります。相愛数は、児童・生徒たちの数学的習熟度に応じて、まるでカメレオンのようにその姿を変えます。

- 小学生にとっては、計算の不思議を体験する「驚きの発見」として
- 中学生にとっては、多項式や恒等式の美しさを学ぶ「数学的構造のモデル」として
- そして探究心旺盛な学習者にとっては、未解決の難問へと続く「研究の種」として

このように、学習者のレベルに合わせて別の顔を見せ続ける点に、この教材の真の魅力があります。

数学は、単なる計算の道具ではありません。相愛数を通して、身近な数の中に潜む対称性や調和を発見する喜びこそが、学習を突き動かす真の原動力となり得るのです。
「相愛数」という視点が、皆さんの教室に新しい発見の光をもたらし、児童・生徒たちが数という友人と深く語り合うきっかけとなることを心から願っています。

参考文献

Kenichi Takemura. “The Magic of a 12-12-12 Split: Discovering Soaisu” (日本語タイトル：6 次自然方陣における相愛数 ♡♡♡ による均等 3 分割). *Math Horizons*, 21–23, 2026. DOI: 10.1080/10724117.2025.2578498.