# $\sin N^\circ$ は有理数か

大津光司

**概要**

0 以上 360 未満の整数 N において，$N = 0,\ 30,\ 90,\ 150,\ 180,\ 210,\ 270,\ 330$ のとき $\sin N^\circ$ が有理数となることは知られている．それ以外の場合，$\sin N^\circ$ が無理数となることを証明した．

## 1　はじめに

「$\tan 1^\circ$ は有理数か (2006 年京都大学後期).」この問題はたいへんよく知られている．本稿では，はじめに類題である「$\sin 1^\circ$ は有理数か.」を考え，さらに他の角度 $N^\circ$ において $\sin N^\circ$ は有理数となるかを調べた．有理数ではない実数を無理数というが，三角関数の値はほとんどの場合，無理数となることがわかった．

## 2　$\sin N^\circ$ が有理数となる場合

$N = 0,\ 30,\ 90,\ 150,\ 180,\ 210,\ 270,\ 330$ のとき，$\sin N^\circ$ が有理数となることはよく知られている．

| $N$ | 0 | 30 | 90 | 150 | 180 | 210 | 270 | 330 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin N^\circ$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ |

## 3　調べるべき $N$ の範囲

次の関係式から 1 以上 90 未満の整数 $N$ について調べれば十分である．

$$\sin N^\circ = \ \sin{(180-N)}^\circ = -\sin{(180+N)}^\circ = -\sin{(360-N)}^\circ$$

## 4　$\sin 1^\circ$ が無理数であることの証明

3 倍角の公式および 5 倍角の公式を用いて $\sin 1^\circ$ が無理数であることを証明する．

**補題 4.1**　$\sin 3\theta$ が無理数ならば $\sin\theta$ は無理数である．

**証明** 対偶が真であることを示せばよい．3 倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より，$\sin\theta$ が有理数ならば $\sin 3\theta$ は有理数となることがわかる．このことから，$\sin 3\theta$ が無理数ならば $\sin\theta$ は無理数であることがわかる．■

**補題 4.2**　$\sin 5\theta$ が無理数ならば $\sin\theta$ は無理数である．

**証明** 対偶が真であることを示せばよい．5 倍角の公式 $\sin 5\theta = 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta$ より，$\sin\theta$ が有理数ならば $\sin 5\theta$ は有理数となることがわかる．このことから，$\sin 5\theta$ が無理数ならば $\sin\theta$ は無理数であることが

わかる． ■

これらのことから，以下のことがすぐに従う．

**命題 4.3** $\sin 1^\circ$ は無理数である．

<u>証明</u> $\sin 45^\circ$ は無理数であることから，**補題 4.1**および**補題 4.2**より $\sin 1^\circ$ が無理数であることがわかる． ■

この証明で用いた補題を一般化したものが次の定理である．

**定理 4.4** $n$ を正の整数とする．$\sin(2n-1)\theta$ が無理数ならば，$\sin\theta$ は無理数である．

<u>証明</u> 対偶が真であることを示せばよい．ド・モアブルの定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n-1} = \cos(2n-1)\theta + i\sin(2n-1)\theta$$

二項定理より

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} {}_{2n-1}\mathrm{C}_k \cdot (\cos\theta)^k \cdot (i\sin\theta)^{2n-1-k}$$

両辺の虚部を比較することにより，次の等式を得る．

$$\sin(2n-1)\theta = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n-1}\mathrm{C}_{2k} \cdot (1-\sin^2\theta)^k \cdot (-1)^{n-1-k} \cdot (\sin\theta)^{2n-1-2k}$$

したがって，$\sin\theta$ が有理数のとき，$\sin(2n-1)\theta$ は有理数となることがわかる．このことから，$\sin(2n-1)\theta$ が無理数ならば，$\sin\theta$ は無理数であることがわかる． ■

**定理 4.4**を用いることにより，以下のことがわかる．

- $\sin 45^\circ$ は無理数であるので，$\sin 1^\circ$，$\sin 3^\circ$，$\sin 5^\circ$，$\sin 9^\circ$，$\sin 15^\circ$ は無理数である．
- $\sin 60^\circ$ は無理数であるので，$\sin 4^\circ$，$\sin 12^\circ$，$\sin 20^\circ$ は無理数である．
- $\sin 120^\circ$ は無理数であるので，$\sin 8^\circ$，$\sin 24^\circ$，$\sin 40^\circ$ は無理数である．
- $\sin 140^\circ\ (=\sin 40^\circ)$ は無理数であるので，$\sin 28^\circ$ は無理数である．
- $\sin 135^\circ$ は無理数であるので，$\sin 27^\circ$ は無理数である．
- $\sin 240^\circ$ は無理数であるので，$\sin 16^\circ$，$\sin 88^\circ$ は無理数である．

## 5 $\sin 2^\circ$ が無理数であることの証明

**命題 5.1** (有理根定理) $a_n \neq 0$ かつ $a_0 \neq 0$ を満たす整数係数多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

において，互いに素である整数 $p$，$q$(ただし $q \neq 0$) が $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ を満たすとき，次が成立する．

(i) $p$ は $a_0$ の約数

(ii) $q$ は $a_n$ の約数

<u>**証明**</u> (i) の証明 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ の両辺に $q^n$ を掛けたのち，$a_0q^n$ について解く．

$$a_0q^n=-p\left(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1}\right)$$

ここで，$p$ と $q$ は互いに素であるから，$p$ は $a_0$ の約数であることがわかる．
(ii) の証明 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ の両辺に $q^n$ を掛けたのち，$a_np^n$ について解く．

$$a_np^n=-q\left(a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}q+\cdots+a_0q^{n-1}\right)$$

ここで，$p$ と $q$ は互いに素であるから，$q$ は $a_n$ の約数であることがわかる． ■

**定理 5.2** $\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$ または $\sin 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ であるとき，$\sin\theta$ は無理数である．

<u>**証明**</u> $\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，3 倍角の公式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ から $\sin\theta$ は次の関係式を満たす．

$$8\sin^3\theta-6\sin\theta-1=0$$

これより，$\sin\theta$ は $x$ に関する 3 次方程式 $8x^3-6x-1=0$ の解の 1 つであるが，**命題 5.1**からこの 3 次方程式は有理数解をもたないことがわかる．したがって，$\sin\theta$ は無理数である．$\sin 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときも同様にして，$\sin\theta$ は無理数であることがわかる． ■

**定理 5.2**を用いることにより，以下のことがわかる．

- $\sin 10^\circ$， $\sin 50^\circ$，$\sin 70^\circ$ は無理数である．

**定理 4.4**を用いることにより，以下のことがわかる．

- $\sin 10^\circ$ は無理数であるので，$\sin 2^\circ$ は無理数であることがわかる．
- $\sin 130^\circ\ (=\sin 50^\circ)$ は無理数であるので，$\sin 26^\circ$ は無理数であることがわかる．
- $\sin 70^\circ$ は無理数であるので，$\sin 14^\circ$ は無理数であることがわかる．
- $\sin 110^\circ\ (=\sin 70^\circ)$ は無理数であるので，$\sin 22^\circ$ は無理数であることがわかる．

## 6 $\sin 6^\circ$ が無理数であることの証明

**定理 6.1** $\sin\theta\neq\pm\dfrac{1}{2}$ である $\sin\theta$ が $\sin 5\theta=\dfrac{1}{2}$ または $\sin 5\theta=-\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．このとき，$\sin\theta$ は無理数である．

<u>**証明**</u> $\sin 5\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，5 倍角の公式 $\sin 5\theta=5\sin\theta-20\sin^3\theta+16\sin^5\theta$ から $\sin\theta$ は次の関係式を満たす．

$$32\sin^5\theta-40\sin^3\theta+10\sin\theta-1=0$$

これより，$\sin\theta$ は $x$ に関する 5 次方程式 $32x^5-40x^3+10x-1=0$ の解の 1 つであるが，**命題 5.1**からこの 5 次方程式は $x\neq\dfrac{1}{2}$ を満たす有理数解をもたないことがわかる．したがって $\sin\theta$ は無理数である．$\sin 5\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときも同様にして，$\sin\theta$ は無理数であることがわかる． ■

**定理 6.1**を用いることにより，以下のことがわかる．

- $\sin 6°$，$\sin 78°$ は無理数である．

## 6.1 $\sin N°$($N$ が 7 以上 89 以下の素数) が無理数であることの証明

**命題 6.2** $p$ を 7 以上 89 以下の素数とする．このとき $\sin p°$ は無理数である．

<u>**証明**</u> $p$ に対し，$px + 360y = 45$ を満たす正の奇数 $x$ と整数 $y$ が存在するとき，

$$\sin px° = \sin (45 - 360y)° = \sin 45°$$

となり $\sin px°$ が無理数であることがわかるため，**定理 4.4**より $\sin p°$ が無理数であることがわかる．これらの条件を満たす $x$，$y$ として次の値を挙げる．

| 7 以上 89 以下の素数 $p$ | 正の奇数 $x$ | 整数 $y$ |
|---|---|---|
| 7 | 315 | − 6 |
| 11 | 135 | − 4 |
| 13 | 225 | − 8 |
| 17 | 45 | − 2 |
| 19 | 135 | − 7 |
| 23 | 315 | − 20 |
| 29 | 225 | − 18 |
| 31 | 315 | − 27 |
| 37 | 225 | − 23 |
| 41 | 45 | − 5 |
| 43 | 135 | − 16 |
| 47 | 315 | − 41 |
| 53 | 225 | − 33 |
| 59 | 135 | − 22 |
| 61 | 225 | − 38 |
| 67 | 135 | − 25 |
| 71 | 315 | − 62 |
| 73 | 45 | − 9 |
| 79 | 315 | − 69 |
| 83 | 135 | − 31 |
| 89 | 45 | − 11 |

■

## 7　$\sin 18^\circ$ が無理数であることの証明

**命題 7.1**　$\sin 18^\circ$ は無理数である．

証明　$\theta = 18^\circ$ とする．$5\theta = 90^\circ$ より $3\theta = 90^\circ - 2\theta$ であるので，$\sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta)$ より

$$\begin{aligned}
&1 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \\
&(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0
\end{aligned}$$

を得る．$\sin\theta \neq 1$ かつ $\sin\theta > 0$ より，$\sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ であるので，$\sin 18^\circ$ は無理数であることがわかる．■

## 8　$\sin 75^\circ$ が無理数であることの証明

**命題 8.1**　$\sin 75^\circ$ は無理数である．

証明

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

より，$\sin 75^\circ$ は無理数であることがわかる．■

**定理 4.4**を用いることにより，以下のことがわかる．

- $\sin 75^\circ$ は無理数であるので，$\sin 25^\circ$ は無理数であることがわかる．
- $\sin 105^\circ \ (= \sin 75^\circ)$ は無理数であるので，$\sin 21^\circ$ は無理数であることがわかる．

## 9　$31 \leqq N \leqq 44$ のとき

**命題 9.1**　$\sin x^\circ$ が無理数であるとき，$\sin\left(45 - \dfrac{x}{2}\right)^\circ$ は無理数である．

証明

$$\sin^2\left(45 - \frac{x}{2}\right)^\circ = \frac{1 - \cos(90 - x)^\circ}{2} = \frac{1 - \sin x^\circ}{2}$$

より，$\sin x^\circ$ が無理数であるとき，$\sin^2\left(45 - \frac{x}{2}\right)^\circ$ は無理数である．したがって，$\sin x^\circ$ が無理数であるとき，$\sin\left(45 - \frac{x}{2}\right)^\circ$ は無理数であることがわかる．■

これまでに 1 以上 29 以下の整数 $N$ において，$\sin N^\circ$ が無理数であることを示しているため，**命題 9.1**を用いることにより，以下のことがわかる．
$31 \leqq N < 45$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．

## 10　$45 < N < 60$ のとき

**命題 10.1**　$45 < N < 60$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．

証明 $N = 50$ の場合については既に示しているため，$N \neq 50$ の場合について示す．$45 < N < 60 (N \neq 50)$ より，$0 < 180 - 3N < 45$ かつ $180 - 3N \neq 30$ であるので，これまでの議論から，$\sin 3N^\circ = \sin (180 - 3N)^\circ$ は無理数であることがわかる．**定理 4.4**より，$45 < N < 60$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．■

## 11　$60 < N < 75$ のとき

**命題 11.1**　$60 < N < 75$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．

証明 $N = 70$ の場合については既に示しているため，$N \neq 70$ の場合について示す．$60 < N < 75 (N \neq 70)$ より，$0 < 3N - 180 < 45$ かつ $3N - 180 \neq 30$ であるので，これまでの議論から，$\sin 3N^\circ = -\sin (3N - 180)^\circ$ は無理数であることがわかる．**定理 4.4**より，$60 < N < 75$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．■

## 12　$75 < N < 90$ のとき

**命題 12.1**　$75 < N < 90$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．

証明 $N = 78,\ 88,\ 89$ の場合については既に示しているため，$N \neq 78,\ 88,\ 89$ の場合について示す．
$75 < N \leqq 87 (N \neq 78)$ より $15 < 5N - 360 \leqq 75$ かつ $5N - 360 \neq 30$ であるので，これまでの議論から，$\sin 5N^\circ = \sin (5N - 360)^\circ$ は無理数であることがわかる．**定理 4.4**より，$75 < N < 90$ のとき，$\sin N^\circ$ は無理数である．■

## 13　$\sin N^\circ$ に関する結論

以上の議論により，次の定理が成立する．

**定理 13.1**　0 以上 360 未満の整数 $N$ に対し，$\sin N^\circ$ が有理数となるのは $N = 0,\ 30,\ 90,\ 150,\ 180,\ 210,\ 270$ , 330 のときに限る．

## 14　さいごに

今回は $\sin N^\circ$ について考えたが，さらに類題として「$\cos N^\circ$ は有理数か.」,「$\tan N^\circ$ は有理数か.」など考えられる．これらについても，高等学校数学の範囲を逸脱することなく調べることが可能である．