12　数学的活動の道標 ③（その２）

前回の続きです。今回は，衛生面やある企業における経常利益に関する類の**最適化**を考えることにしましょう。不等式は，数直線だけでなく，領域として扱えることも重要な観点です。

例題20

ある水産施設のタンク内では海水魚Ｆを養殖している。ただ，タンク内においてバクテリア X は T 分間で２倍に増殖することがわかっており，タンク内に設置されているろ過装置は，タンク内の海水を１回ろ過することにより，バクテリア数を x $(0<x<100)$ ％減少させることができるものである。このとき，次の問いに答えよ。ただし，海水をろ過する所要時間は無視してよいものとする。

(1)　いまタンク内の海水中に N 個のバクテリアが存在するとき，t 分後のバクテリアの個数 n を求めよ。

(2)　m 時間後に何回かタンク内の海水をろ過する。海水魚Ｆの養殖開始時点よりバクテリア数を少なくするために必要なろ過回数を r とする。このとき，記号[　]を用いて r を m，x の式で表せ。ただし，記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(3)　$N=2$，$T=60$，$x=75$ のとき，4時間後には少なくとも何回ろ過する必要があるか答えよ。

（**例題20** **の略解**）

(1)　タンク内のバクテリア数が１分間に p 倍に増殖するとき，T 分間でこのバクテリア数は

$$p^T \text{倍}$$

となり，条件より

$$p^T=2$$

であるから，すなわち

$$p=2^{\frac{1}{T}}$$

である。したがって，タンク内の海水中に N 個のバクテリアが存在するとき，t 分後のバクテリアの個数 n は

$$n=N\cdot p^t=\underline{\underline{N\cdot 2^{\frac{t}{T}}}}$$

(2)　１回のろ過によりバクテリア数は x ％減少するから，

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)\text{倍}$$

になる。つまり，ろ過を r 回行うと，バクテリア数は

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)^r \text{倍}$$

となる。

このとき，m時間＝$60m$分であるから，m時間後のバクテリア数は，(1) より

$$N\cdot 2^{\frac{60m}{T}}\left(1-\frac{x}{100}\right)^r \quad \text{（個）}$$

であるから，海水魚 F の養殖開始時点よりバクテリア数を少なくするための条件は

$$N\cdot 2^{\frac{60m}{T}}\left(1-\frac{x}{100}\right)^r < N$$

である。これより，両辺に底を 2 とする対数をとると

$$\log_2\left\{N\cdot 2^{\frac{60m}{T}}\left(1-\frac{x}{100}\right)^r\right\} < \log_2 N$$

$$\frac{60m}{T} + r\log_2\left(1-\frac{x}{100}\right) < 0$$

$$r\log_2\left(1-\frac{x}{100}\right) < -\frac{60m}{T}$$

$$r\log_2\frac{100-x}{100} < -\frac{60m}{T}$$

であり，ここで

$$\log_2\frac{100-x}{100} = -\log_2\frac{100}{100-x} < 0$$

であるから，上式は

$$r\log_2\frac{100}{100-x} > \frac{60m}{T}$$

$$r > \frac{60m}{T\log_2\dfrac{100}{100-x}}$$

である。したがって，これを満たす最小の整数が求めるろ過の回数であるから

$$\underline{\underline{r = \left[\frac{60m}{T\log_2\dfrac{100}{100-x}}\right] + 1}} \quad \text{(回)}$$

である。

(3)　(2) より，$N=2$，$T=60$，$x=75$のとき

$$r = \left[\frac{60m}{60\log_2 4}\right] + 1 = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$$

であるから，バクテリア数を養殖開始時点より増やさないためには，4 $(=m)$時間後には，少なくとも

$$\underline{\underline{3\text{回}}}$$

ろ過する必要がある。

では，線形計画法に関する内容をとりあげます。高校の教科書でも掲載されている内容ですが，数学的な観点からすると，最適な状況を考察することが主軸になるでしょう。ここでは，代表的な問題をカーボンニュートラルの世界にもつなげておきます。

例題 21

液化天然ガス（LNG）を運搬する 2 つの燃料船 A，B がある。そこで，海外から計 150 万トンの LNG をつねに 2 つの燃料船 A，B で運搬するものとし，燃料船 A は 50 万トン，燃料船 B は 100 万トンの LNG を運搬するものとする。また，燃料船 A は神戸港に着岸し，燃料船 B は大阪港に着岸する。

このとき，神戸港と大阪港より LNG を 3 つの貯蔵庫 P，Q，R に輸送することを考える。3 つの貯蔵庫 P，Q，R はそれぞれ 30 万トン，40 万トン，80 万トンの LNG を貯蔵するものとし，神戸港と 3 つの貯蔵庫 P，Q，R の距離はそれぞれ 8km，13km，17km であり，大阪港と 3 つの貯蔵庫 P，Q，R の距離はそれぞれ 12km，14km，9km である。

ここで，

（輸送コスト）＝（LNG の量）×（港から各貯蔵庫までの輸送距離）

と定めるとき，輸送量コストを最小限にするには，神戸港と大阪港より 3 つの貯蔵庫 P，Q，R に輸送する LNG の量をそれぞれどのようにすればよいか。

（**例題 21** の略解）

神戸港から貯蔵庫 P に輸送する LNG の量を x 万トン，貯蔵庫 Q に輸送する LNG の量を y 万トンとするとき，次のような表を考えることができる。

	貯蔵庫 P(万トン)	貯蔵庫 Q(万トン)	貯蔵庫 R(万トン)	合計(万トン)
神戸港	x	y	$50-(x+y)$	50
大阪港	$30-x$	$40-y$	$30+(x+y)$	100
合計(万トン)	30	40	80	150

ただし，x，y について

$$0 \leqq x \leqq 30,\quad 0 \leqq y \leqq 40,\quad 0 \leqq x+y \leqq 50 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

である。

ここで，輸送コストを U とすると，

$$\begin{aligned} U &= 8x+13y+17\{50-(x+y)\}+12(30-x)+14(40-y)+9\{30+(x+y)\} \\ &= (8-17-12+9)x+(13-17-14+9)y+(850+360+560+270) \\ &= -12x-9y+2040 \end{aligned}$$

であるから，これを y について解くと

$$y = -\frac{4}{3}x+\frac{2040-U}{9} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

である。

すなわち，輸送コスト U を最小にするには

①の領域において，直線②が点

$$(x,\ y)=(30,\ 20)$$

を通るとき，y軸との切片が最大となり，輸送コストUは最小となる。

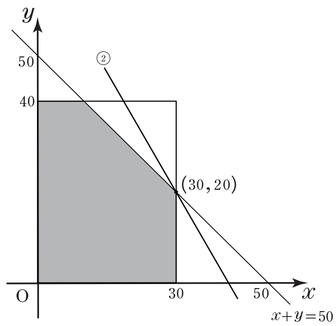
したがって，

$$x=30,\quad y=20$$

のときに輸送コストUの最小値は

$$U=-12\cdot 30-9\cdot 20+2040=1500$$

となり，



神戸港から3つの貯蔵庫P，Q，Rへ輸送するLNGの量はそれぞれ30万トン，20万トン，0万トンであり，また，大阪港から3つの貯蔵庫P,Q,Rへ輸送するLNGの量はそれぞれ0万トン，20万トン，80万トン

である。

以上のように，不等式を系統的に習得する題材として話をすすめてきましたが，このたびの学習指導要領の改訂にともない，探究的な素地をどのように構築するのかは，各学校や各教員に任せられている部分があるかもしれません。この **例題21** においては，さまざまな観点が含まれており，たとえば，2つの港から3つの貯蔵庫P，Q，Rへの輸送距離を変化させる（新たな貯蔵庫を設定する），燃料船が運ぶLNGの運搬量や各貯蔵庫で蓄えることができるLNG量を変化させるなど，何を変化させるとどのような変化が起こりうるのかを考察することができます。問題を解くことから「**学びのパラダイムシフト**」にもつなげることができるものでしょう。

2回にわたり，不等式から得られた情報をたよりに，ものごとを正しく判断できるような話をさせていただきました。日常生活のさまざまな場面で記事以外のことにおいても，不等式を利活用することで，これまでと**異なる世界観を得られる**ことが多々あります。そのような観点をもって対応したいものです。