11　数学的活動の道標 ③（その 1）

今回は，数（式）の大小について考察します。日常生活のなかで経験していることや体験したことを参考にし，数式を用いて表現することをスタートとしましょう。

たとえば，世の中には，便利なツールや機器，装置などが多種多様に存在しますが，それらを使用することで生まれるコストについては，きちんとシミュレーションしたうえで採用するかしないかを正しく判断したいものです。初期投資で多額の機器（装置）を導入する場合は，どれくらいの期間でお得な状態になるのかを，その場の雰囲気にのみこまれることなく考える必要があるでしょう。初期投資をする場合はとくに要注意であり，現実的には，もう少し複雑にされているケースが多く，保証期間なども考慮する必要があるからです。

ここでは，中学や高校で学ぶ数学を駆使し，精査したほうがよいのではないかと個人的に感じることを簡易モデルとして提起してみたいと思います。**不等式**の扱いは，生きていくうえでも欠かすことができない**最適化**に直結しているエッセンスであることを実感しましょう。

例題18

次の表は，2 つの携帯電話会社 **A 社**と **B 社**における 1 か月あたりのデータ使用量に関する内訳（基本料金とデータ使用量ごとの料金）をまとめたものである。ただし，通話料は考えないものとし，データ使用量は連続であるものとする。また，各社に支払う月あたりの支払い金額は基本料金とデータ使用量ごとの料金の和とする。

・**A 社**の基本料金は月額 2000 円

データ使用量(単位はGB:ギガバイト)	データ使用量ごとの料金
0 GB以上2 GB以下	0円
2 GBより大きく5 GB以下	2 GBをこえる分について，0.1 GBあたり100円
5 GBより大きく10 GB以下	5 GBまでの料金に加え，5 GBをこえる分について，0.1 GBあたり140円
10 GBより大きい	一律10000円

・**B 社**の基本料金は月額 1000 円

データ使用量(単位はGB:ギガバイト)	データ使用量ごとの料金
0 GB以上8 GB以下	0.1 GBあたり100円
8 GBより大きい	8 GBまでの料金に加え，8 GBをこえる分について，0.1 GBあたり80円

(1)　1 か月あたりのデータ使用量が 5 GB であるとき，A 社に支払う金額を S 円とする。このとき，B 社のプランで S 円を支払うとき，最大何 GB のデータ使用量となるか。

(2)　1 か月あたりのデータ使用量について，A 社と B 社に支払う金額が等しくなるデータ使用量を求めよ。

（$\boxed{\text{例題18}}$ の略解）

(1)　A 社におけるデータ使用量が 5 GB のとき，基本料金の 2000 円に加え，3 GB の追加料金 3000 円が必要であるから，S は 5000 円である。

　このとき，B 社におけるデータ使用量を d GB とするとき，$0 \leqq d \leqq 8$ の場合の支払い金額は

$$1000d + 1000$$

であるから，これが 5000 円をこえないのは

$$1000d + 1000 \leqq 5000$$

すなわち

$$0 \leqq d \leqq 4$$

である。したがって，B 社におけるデータ使用量の最大値は $\underline{\underline{4\ \text{GB}}}$ である。

(2)　データ使用量を x GB とし，1 か月に支払う金額を y 円とする。このとき，A 社では，

　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$y = 2000$

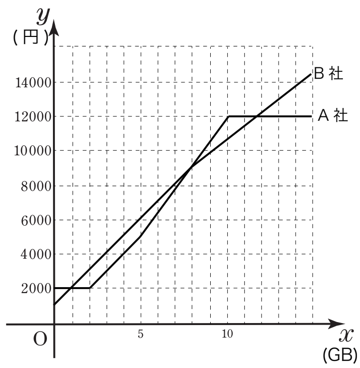
　$2 < x \leqq 5$ のとき，$y = 2000 + 1000(x - 2) = 1000x$

　$x = 5$ のとき，$y = 5000$

　$5 < x \leqq 10$ のとき，$y = 5000 + 1400(x - 5) = 1400x - 2000$

　$10 < x$ のとき，$y = 2000 + 10000 = 12000$

である。



　一方，B 社では，

　$0 \leqq x \leqq 8$ のとき，$y = 1000x + 1000$

　$x = 8$ のとき，$y = 8000 + 1000 = 9000$

　$8 < x$ のとき，$y = 9000 + 800(x - 8) = 800x + 2600$

である。

　ここで，A 社と B 社のそれぞれについて，データ使用量と支払い金額の関係を表すグラフをかくと，図のようになる。これより，A 社と B 社の支払い金額が等しくなるのは

・$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$$2000 = 1000x + 1000$$

　すなわち，B 社においてデータ使用量が $x = \underline{\underline{1}}$ GBのときで，2000 円である。

・$5 \leqq x \leqq 8$ のとき，

$$1400x - 2000 = 1000x + 1000$$

　すなわち，A 社と B 社ともにデータ使用量が $x = \underline{\underline{\dfrac{15}{2}}}$ GBのとき，8500 円である。

・$10 < x$ のとき，

$$12000 = 800x + 2600$$

　すなわち，B 社においてデータ使用量が $x = \underline{\underline{\dfrac{47}{4}}}$ GBのときで，12000 円である。

（略解では，1 次関数を用いて話をすすめましたが，ガウス記号を導入することで，同様の議論は可能です。）

このように**不等式**によって得られた知識と技能は，生活にフィットするようなものごとを考えることができ，しかも，最適なことを見出せるようになります。また，自分自身の生活を見直すこともできる素地が存在します。

余談ではありますが，タクシー料金や宅急便の宅配料金などは，ガウス記号などを用いて料金体系を考えることができ，また，家電製品においても，白熱電球やLED電球の初期投資費用やランニングコスト（寿命時間，消費電力，電気料金）などについても，おもしろい考察ができるかと思います。

また，高校数学において習得する**相加平均と相乗平均の大小関係**は，次のような場面で威力を発揮します。

例題19

電気自動車（以下，電動車）は充電をしてはじめて駆動するものであり，電動車には蓄電器が備わっている。

ある家庭において，ある電動車Vに充電するため，2本の急速充電装置PとQが設置されている。そこで，電動車Vの蓄電器に充電をするにあたり，はじめ急速充電装置Pのみを用いて蓄電器の$\frac{1}{5}$を充電したのち，急速充電装置Pをはずしてから，急速充電装置Qのみを用いて充電をしたところ，電動車Vの蓄電器は合計9時間でフル充電となった。

このとき，電動車Vの蓄電器に充電するにあたり，はじめから2本の急速充電装置PとQを同時に用いて充電を始めるとき，電動車Vの蓄電器は5時間以内でフル充電できることを証明せよ。

（**例題19** **の略解**）

急速充電装置PとQが，1時間あたりに充電できる蓄電量をそれぞれp，qとし，電動車Vの蓄電器容量をMとする。

このとき，条件から

$$\frac{\frac{1}{5}M}{p}+\frac{\frac{4}{5}M}{q}=9$$

すなわち

$$\frac{1}{p}+\frac{4}{q}=\frac{45}{M} \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

である。

ここで，2本の急速充電装置PとQを同時に用いた場合の充電する所要時間をTとすると

$$T=\frac{M}{p+q}$$

であり，この所要時間Tの最大値を考えればよい。

このとき，$p>0$，$q>0$であるから，①の両辺に$(p+q)$をかけると

$$(p+q)\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{q}\right)=\frac{45}{M}(p+q)$$

すなわち

$$5+\frac{q}{p}+\frac{4p}{q}=\frac{45}{M}(p+q)$$

であり，$\dfrac{q}{p}>0$，$\dfrac{4p}{q}>0$より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{45}{M}(p+q)=5+\frac{q}{p}+\frac{4p}{q}\geqq 5+2\sqrt{\frac{q}{p}\cdot\frac{4p}{q}}=9$$

が成り立つ。

これより

$$\frac{p+q}{M}\geqq\frac{9}{45}$$

すなわち

$$T=\frac{M}{p+q}\leqq 5$$

である。

したがって

2 本の急速充電装置 P と Q を同時に用いて充電するとき，その所要時間Tは 5 時間以内でフル充電できる

ことが証明できた。　**（終）**

科学技術は日々刻々と進化しており，電気自動車 1 台をフル充電するには，現時点では 5 時間以上 10 時間ほどの時間がかかるようです。

このように，2 つの例題を通して，数学を学ぶということは，ものごとを正しく判断できるような目を養うことでもあります。