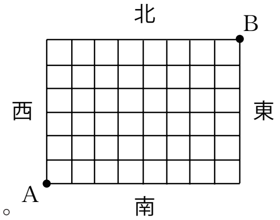
10　数学的活動の道標 ②（その２）

前回は，**確率**と**期待値**の**実用的**な側面にふれました。今回は，教科書に掲載されている「**道順**」をもとに話を進めていこうと思います。

実をいうと「**道順**」は，この連載における第１回めの **例題１** で，すでに登場しています。

例題１

図のように，東西南北に走る道路網があり等間隔に整備されている。このとき，次の【**条件**】を考える。



【**条件**】点 A から点 B に行く最短経路で，角をちょうど 5 回曲がる。

この **例題１** の場合の数を正しく求めることも目的の 1 つかもしれませんが，本来の目的を見失わずにいることが，「**道順**」の利活用の幅を拡充するものだと思います。

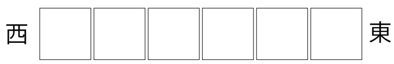
例題１６

ある街の一部では，最適な電力を供給するため，住宅の区画を整備する計画がある。その計画では，スマートエネルギー住宅か一般住宅の建築のみでその部分を整備しようとしている。

(1)　図のような 6 区画に，スマートエネルギー住宅を 3 棟，一般住宅を 3 棟建築する。ここで，西側から東側に向かって順に住宅を建築するとき，どの段階でもつねに

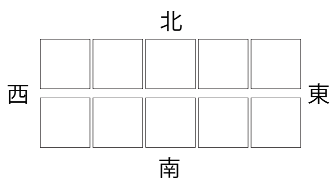
（西側にあるスマートエネルギー住宅の戸数）≧（西側にある一般住宅の戸数）

を満たす住宅の建て方の場合の数は何通りあるか求めよ。



次に，ある区画では，すべてスマートエネルギー住宅を建築する計画がある。また，その区画に建築されるスマートエネルギー住宅はそれぞれ相異なる省エネ基準レベルの住宅であり，数字が大きいほど省エネ基準レベルが高いものである。

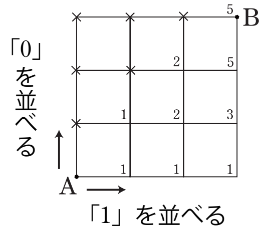
(2)　図のような 10 区画に，スマートエネルギー住宅を 10 棟建築するとき，省エネ基準レベルの数値がつねに同一の行（東西方向）では，西側より東側の方が高く，同一の列（南北方向）では，南側より北側の方が高いような住宅の建て方の場合の数は何通りあるか求めよ。



（ **例題１６** の略解）

(1)　スマートエネルギー住宅を建築することを「1」，一般住宅を建築することを「0」とする。ここで，「1」と書かれたカード 3 枚と「0」と書かれたカード 3 枚の合計 6 枚のカードを，左（西側）から順に並べていくとき，どの段階でもつねに並べたカードについて，「1」と書かれたカードの枚数が，「0」と書かれたカードの枚数以上であれば条件を満たす。

このとき，「1」のカードを横の移動に対応させ，「0」のカードを縦の移動に対応させると，すなわち，これら 6 枚のカードにより，右図のような3× 3マスの道順が対応する。



ここで，点 A から点 B に至る道順の最短経路を考えると，× 印を通過してはならない道順の総数が，求める住宅の建て方の場合の数に等しいから，それは

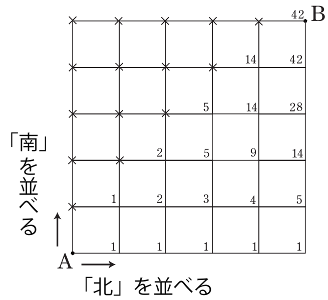
5（通り）　　**（答）**

である。

(2)「北」と書かれたカードが 5 枚，「南」と書かれたカードが 5 枚あり，合計 10 枚のカードを横一列に左側から順に並べていくことを考える。ここで，スマートエネルギー住宅の省エネ基準レベルの 10 段階を 10，9，8，7，6，5，4，3，2，1 とすると，条件を満たすスマートエネルギー住宅の建て方は， 10 棟すべての住宅の省エネ基準レベルはそれぞれ異なるから，数字が大きいほうから順に 10，9，8，……，2，1 と右上側（北東側）から詰めて住宅を建築すればよい。

したがって，10 枚のカードをすべて横一列に並べるとき，「北」と書かれたカードを置くと北側の区画に住宅を建て，「南」と書かれたカードを置くと南側の区画に住宅を建て，どの段階でも，横一列に左側からカードを並べると，つねに「北」と書かれたカードの枚数が，「南」と書かれたカードの枚数以上であればよい。

このとき，「北」のカードを横の移動に対応させ，「南」のカードを縦の移動に対応させると，これら 10 枚のカードを並べることで右図のような5× 5マスの道順が対応する。



ここで，点 A から点 B に至る道順の最短経路を考えると，× 印を通過してはならない道順の総数が，求める住宅の建て方の場合の数に等しいから

42（通り）　　**（答）**

である。

例題１６ の背景は，**カタラン数**です。個人的な見解（推測）で恐縮ですが，ケーキ屋さんのウインドウでケーキが並んでいるケーキ配列は，品質管理の側面からすると，カタラン数の配列が実現しているかもしれません。

上述したように，「**道順**」に**対応**させる手続きは，これ以外にもたくさん存在しますが，たとえば，2 チーム（2 人）で試合を行うときの勝敗問題は，より簡素化して考察できるようになるでしょう。

例題17

太郎さんチームと花子さんチームの2チームでドッジボールの試合を行い，先に4勝したチームを優勝と決める。優勝が決まった時点で，それ以降の試合は行わず，各試合に引き分けはないものとする。

過去の対戦成績によると，1回の試合で太郎さんチームが花子さんチームに勝つ確率は $\dfrac{3}{5}$ である。

(1)　太郎さんチームが4勝2敗で優勝する確率を求めよ。

(2)　花子さんチームは1試合めと2試合めに勝った。このとき，太郎さんチームが優勝する確率を求めよ。

(3)　4試合めが終了した時点で，太郎さんチームは1勝3敗であった。このとき，どちらかのチームの優勝が決まるまでの残りの試合数の期待値を求めよ。

太郎さんチームが勝つことを，x軸の正の方向に1だけ移動することに対応させ，花子さんチームが勝つことを，y軸の正の方向に1だけ移動することに対応させると，下の図のような道順が考えられます。

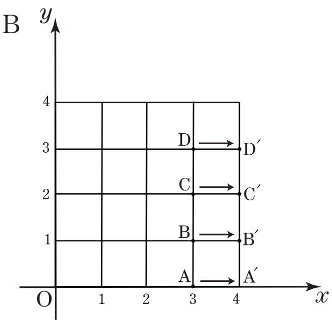
たとえば,太郎さんチームが4勝1敗で優勝するのは,図における道順の最短経路に対し,点O(試合前）から点Bに行き，点Bから点B′に至ればよいことがわかります。

つまり，道順に対応させて考えると，太郎さんチームが4勝1敗で優勝するとき，点A′は経由してはならないような誤認が回避でき，確率の計算もしやすくなるものと思います。

したがって，太郎さんチームが4勝1敗で優勝するのは，1試合めから4試合めのうち，太郎さんチームは3勝1敗（点Bに到達）であり，5試合めで勝つ（点Bから点B′にいく）ことで優勝が実現するから，その確率は

$$ {}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{648}{3125} $$

となります。実は，この確率は，本問の(1)と等しくなり，またこのような場面で意外性を認識することもできます。



（**例題17** の略解）

(1)　太郎さんチームが4勝2敗で優勝するのは,6試合めで優勝が決定することである。すなわち，5試合めが終了した時点で，太郎さんチームは3勝2敗であり，6試合めは太郎さんチームが勝つことで太朗さんチームの優勝が実現できる（図においては，点Oから点Cに行き，点Cから点C′に進むことが対応している)。

したがって，求める確率は

$$ {}_5C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\underline{\underline{\frac{648}{3125}}} $$

である。

(2)　2試合めが終了した時点で，太郎さんチームは0勝2敗であるから，太郎さんチームが優勝するのは，これより4連勝または3勝1敗のいずれかである。このとき，上図の道順で最短経路を考えると，

点$(0,\ 2)$から点Cに至り，点Cから点C′に到達する

または

点$(0,\ 2)$から点Dに至り，点Dから点D′に到達する

のいずれかであるから，求める確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{3}{5}+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{81}{625}+\frac{648}{3125}=\underline{\underline{\frac{1053}{3125}}}\quad(\text{約 }34\,\%) $$

である（太郎さんチームが優勝する可能性は3割もあるのか，それとも3割しかないのかととらえるのは，各個人の思いによるものです）。

(3)　4試合めが終了した時点で，太郎さんチームは1勝3敗であるから，花子さんチームは3勝1敗である。5試合め，6試合め，7試合めにおける勝敗で優勝が決まるから，このとき，優勝が決まるまでの試合数をNとする。

・$N=1$であるとき，花子さんチームが優勝することになる。すなわち，その確率は

$$ \frac{2}{5} $$

である。

・$N=2$であるとき，花子さんチームが優勝することになる。すなわち，5試合めは太郎さんチームが勝ち，6試合めは花子さんチームが勝つことで優勝となるから，その確率は

$$ \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25} $$

である。

・$N=3$であるとき，太郎さんチームまたは花子さんチームが優勝することになる。すなわち，5試合め，6試合め，7試合めにおいて，太郎さんチームが3連勝するとき，太郎さんチームが優勝するから，その確率は

$$ \left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125} $$

である。

　また，5試合め，6試合めは太郎さんチームが勝ち，7試合めは花子さんチームが勝つとき，花子さんチームが優勝するから，その確率は

$$ \left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}=\frac{18}{125} $$

である。

　したがって，どちらかのチームの優勝が決まるまでの残りの試合数の期待値$E(N)$は

$$ E(N)=1\cdot\frac{2}{5}+2\cdot\frac{6}{25}+3\cdot\left(\frac{27}{125}+\frac{18}{125}\right)=\frac{10}{25}+\frac{12}{25}+\frac{27}{25}=\underline{\underline{\frac{49}{25}}}\ (\text{試合}) $$

である（優勝に王手がかかったとき，このような考察が役に立つものと信じたいですね）。