8 数学的活動の道標 ①（その２）

前回は，中学や高校での「学び」を「点」ととらえ，それらを結ぶ「学び」が実現できるような話をさせていただきました。今回はその続きであり，基本的な数学的内容がいつからか，高度で実用性が高い「学び」に繋がっているという観点を含め，話を進めていきたいと思います。

それらを具現化すると，たとえば，小学校で習得する「**割合**」は，中学校における「**食塩水**」の問題，高校における「**漸化式**」などへとつなげることができるものであり，逆に，高校で漸化式を学んだ際にこのように遡ることによって，「点」と「点」が結ばれる「学び」が体感できると思います。「**食塩水**」の問題は実用的で汎用性が高く，たとえば，薬学部に進学し，いくつかの薬品を調合する際には，これらの「学び」が役に立っているものと実感できるものでしょう。現代は，それらの数量などはコンピュータによって教示（提示）されていることが多いですが，物事のベースにはこのような基本的な「学び」の連続性がともなっていることを，授業のなかでも伝えておいてもよさそうです。そのような観点をもって，「食塩水」の問題でクローズせず，幅広く対応しておく必要があると思います。

例題１２　（以下の設問では，濃度は質量パーセント濃度とする。）

〔１〕ある１つの容器に，薬Ａが均一に溶けこんでいる濃度a％の薬品が入っている。ここで，容器に入っている$\dfrac{1}{5}$の質量を取りだしそれを捨て，その代わりに同じ質量の水を容器に入れよくかき混ぜ均一にし，これを１回の作業とする。この作業をくり返し行うとき，次の問いに答えよ。ここで，nは自然数とし，必要ならば$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$を用いてもよい。

(1)　作業をn回くり返し行ったとき，容器に入っている薬Ａの濃度をaを用いて表せ。

(2)　作業をn回くり返し行ったとき，容器に入っている薬Ａの濃度がはじめて$\dfrac{a}{10}$％以下となる最小の自然数nを答えよ。

〔２〕ある会社が，二酸化炭素を回収できるセメントを開発した。容器Ａには二酸化炭素回収素材Ｓが均一に溶けこんでいる濃度25% のセメントが1000g 入っており，容器Ｂには二酸化炭素回収素材Ｓが均一に溶けこんでいる濃度10％のセメントが1000g 入っている。

そこで，容器Ｂから250 g を取り出し，それを容器Ａに入れてよくかき混ぜ均一にした後，容器Ａから250 gを取り出し容器Ｂに戻しよくかき混ぜ均一にする。これを１回の作業として，この作業をくり返し行う。

この会社では，容器Ａと容器Ｂに溶けこんでいる二酸化炭素回収素材Ｓの濃度差がはじめて0.01% 以下になった際に，セメントを販売することにしている。これが実現できるのは，少なくとも何回めの作業を行ったときか。必要ならば$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$を用いてもよい。

（ 例題１２ の略解）

〔１〕

(1)　作業をする前，容器に入っている濃度a％の質量をM_0 gとすると，容器に溶けこんでいる薬Aの質量m_0は

$$m_0 = \frac{a}{100}M_0 \text{ (g)}$$

である。

ここで，この容器から$\frac{1}{5}$の質量を取り出したとき，容器に溶けこんでいる薬Aの量m_1は

$$m_1 = \frac{4}{5}m_0 = \frac{4}{5}\cdot\frac{a}{100}M_0 \text{ (g)}$$

であるから，これに取り出した同じ量の水を加え，よくかき混ぜたとき，容器に入っている薬Aの濃度は

$$\frac{\frac{4}{5}m_1}{\frac{4}{5}M_0+\frac{1}{5}M_0}\cdot 100 = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{a}{100}M_0}{M_0}\cdot 100 = \frac{4}{5}a\,(\%)$$

である。

したがって，1回の作業によって，容器に入っている薬Aの濃度は$\frac{4}{5}$倍になるから，この作業をn回行ったとき，その濃度は

$$\underline{\underline{\left(\frac{4}{5}\right)^n a}} \text{ (\%)} \qquad \textbf{(答)}$$

である。

(2)　作業をn回くり返し行ったとき，容器に入っている薬Aの濃度がはじめて$\frac{a}{10}$％以下となったとすると，不等式

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n a \leqq \frac{a}{10}$$

を満たす最小の自然数nを見出せばよい。

このとき，両辺に常用対数をとると

$$n(2\log_{10}2 - \log_{10}5) \leqq -1 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

であり，ここで

$$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - \log_{10}2$$

であるから，①は

$$(3\log_{10}2 - 1)n \leqq -1$$

すなわち，$3\log_{10}2 - 1 < 0$より

$$n \geqq \frac{1}{1-3\log_{10}2} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

である。

このとき，$0.301 < \log_{10}2 < 0.302$ より

$$1-0.906 < 1-3\log_{10}2 < 1-0.903$$

であり，さらにこれより

$$\frac{1}{0.097} < \frac{1}{1-3\log_{10}2} < \frac{1}{0.094}$$

であるから

$$\frac{1}{0.097} = 10.309\cdots,\ \frac{1}{0.094} = 10.638\cdots$$

である。

したがって，②より，求める自然数nの最小値は

$$\underline{\underline{n = 11}} \qquad \textbf{(答)}$$

である。

〔**1**〕では，1つの容器に対し，濃度を薄くするという作業に終始していますが，〔**2**〕では，入れ替え作業によって，濃度差に焦点を当てています。ここでは，2つの容器に溶けこんでいる素材Sの和は，作業回数nの値に関係なく一定($a_n + b_n = 350$)であるから，これを利用することで，一般的なa_n，b_nも得られます。このような考察が必要なとき，**漸化式**を学ぶ意義が深まるかと思います。以下の解説では，いきなりn回めと$(n+1)$回めの作業における推移を述べていますが，ハードルが高い場合には，1回めの作業が終了したときに，それぞれの容器に溶けこんでいる素材Sの質量を把握することもよいでしょう。また〔**2**〕の設問は，カーボンニュートラルに関連するマテリアル産業にスポットライトを当て考えてみました。夢のセメントかもしれません。

〔**2**〕

nを0以上の整数とし，n回めの作業後における容器Aと容器Bに溶けこんでいる二酸化炭素回収素材Sの量を，それぞれa_n(g)，b_n(g)とする。

このとき，$(n+1)$回めの作業を考えると，容器Aと容器Bに溶けこんでいる二酸化炭素回収素材Sの量は，それぞれ

$$a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{4}b_n\right)\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}(4a_n + b_n)$$

$$b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \left(a_n + \frac{1}{4}b_n\right)\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$$

であり，これらの辺ごとの差により

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{5}(a_n - b_n)$$

であるから，0以上の整数nに対し

$$a_n - b_n = (250 - 100)\left(\frac{3}{5}\right)^n = 150\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

である。このとき，n回めの作業後における容器 A と容器 B の濃度差が 0.01 % 以下になるのは

$$\frac{150\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1000} \cdot 100 \leqq \frac{1}{100}$$

すなわち

$$15\left(\frac{3}{5}\right)^n \leqq \frac{1}{100}$$

を満たす自然数nを見出せばよいから，ここで，両辺に常用対数をとると

$$\log_{10} 15 + n\log_{10}\frac{3}{5} \leqq \log_{10}\frac{1}{100}$$

$$(\log_{10} 3 + \log_{10} 5) + n(\log_{10} 3 - \log_{10} 5) \leqq -2$$

$$\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 + n(\log_{10} 3 + \log_{10} 2 - 1) \leqq -2$$

$$n \geqq \frac{3.176}{0.222} = 14.3\cdots$$

が得られる。

　したがって，容器 A と容器 B に溶けこんでいる二酸化炭素回収素材 S の濃度差がはじめて 0.01 % 以下になるのは

15回め　　　**(答)**

の作業が終わったときである。

　少し補足しておくと

$$a_n + b_n = 350, \quad a_n - b_n = 150\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

であるから，これらの辺ごとの和より

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{350 + 150\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = 175 + 75\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

であり，辺ごとの差により

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{350 - 150\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = 175 - 75\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

が得られます。

　以上のように，小学，中学，高校での「学び」は，どのような場面でも**数学的な観点**とその**実用的な観点**をあわせもち，それらがそのまま社会へ還元され，学びのおもしろさにつながっていると思います。「細切れ」の「学び」が，大きなうねりとなる「学び」につながっていることを実感させたいものではないのでしょうか。