7　数学的活動の道標 ①（その１）

前回までに，中学や高校における「数学」がどのような形で日常生活や社会に応用されているのかを**簡易モデル**によって話をすすめてきました。とくに，「実用的な数学の題材」というテーマのなかでは, ふだんの「学び」が, 社会基盤や科学技術にも直結している内容を伝えたつもりです。また，紹介したこと以外にもたくさんの事例や問題は存在するかと思いますが，今回は**中学校学習指導要領（平成29年告示）解説（数学編）「数学的活動の取組における配慮事項**」で述べられている

（ア）数学的活動を楽しみ，**数学を学習することの意義**や**数学の必要性を実感する**こと

（イ）見通しをもって数学的活動に取り組み，**振り返る**こと

（ウ）観察や操作，実験などの活動を通すこと

（エ）数学的活動の成果を共有すること

について，個人的な見解を含め話を進めていきたいと思います。

さて，これまでにも学習指導要領は約10年の期間で改訂されており，とくに，不等式の取り扱いは丁重に対応しなければならないことの１つでしょう。段階的（時系列的）な学び，すなわち「与えられた数量の大小を判断すること」「方程式や不等式を立式すること」「方程式や不等式について解を求めること」などといった不易な部分は存在するでしょうが，上記の**（ア）**～**（エ）**のすべてを満たせるような題材はなかなか見つけにくいものです。ふだんの「学び」は「細切れ」的な部分は否めないものですが，高校で学ぶ数列分野における**等比数列**や**漸化式**が，中学で学んだ内容をあらためて感じる学びとして結合されると，それこそ「点」と「点」が結ばれる「学び」となり，上記の**（ア）**～**（エ）**が実現できるものではないかと思います。長い時系列のなかで, 学ぶ側（生徒）の「学び」が連綿と続き，それらが社会でも日常生活でも通ずるものであることをどこかのタイミングで実感し得ることは，学ぶことのおもしろさを高揚し，意義深くなるものであることは言うまでもありません。

ではははじめに，中学数学でよく扱われる題材を取り上げてみましょう。

例題１０

次の問いに答えよ。

(1)　ある数xを３倍して５を加えたとき，これをxの式で表せ。

(2)　与えられた数を「３倍して５を加える」という操作（手続き）をＰとする。
xにＰを４回続けて行うとき，４回後にはどのような数になっているかをxの式で表せ。

(3)　容器Ａに，果汁a％のオレンジジュースが100g入っている。容器Ａに，果汁8%のオレンジジュース300gを加えてからよくかき混ぜ，容器Ａから300gのオレンジジュースを取り出す工程をＴとする。このとき，工程Ｔを３回くり返した後の容器Ａの果汁濃度をaの式で表せ。

（$\boxed{\text{例題10}}$の略解）

(1)　$\underline{\underline{3x+5}}$　　(答)

(2)　1回めで$3x+5$となるから，2回めで

$$3(3x+5)+5=9x+20$$

であり，3回めで

$$3(9x+20)+5=27x+65$$

であるから，Pを4回続けて行うと，4回後には

$$3(27x+65)+5=\underline{\underline{81x+200}}\qquad\text{(答)}$$

である。

(3)　容器Aにおける果汁濃度a%のオレンジジュース100gには

$$\frac{a}{100}\cdot 100=a\ \text{(g)}$$

の果汁が溶けこんでいる。

また，果汁8%のオレンジジュース300gには

$$\frac{8}{100}\cdot 300=24\ \text{(g)}$$

の果汁が溶けこんでいる。

ここで，これら2つのオレンジジュースを混ぜると，容器Aの果汁濃度は

$$\frac{a+24}{100+300}\cdot 100=\frac{a+24}{4}=\frac{1}{4}a+6\ (\%)$$

変化しない。

したがって，容器Aに入っている果汁濃度a%は，1回の工程Tで，

$\frac{1}{4}$倍され6を加えた濃度

となる。また，2回めの工程Tの後には，容器Aの果汁濃度は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a+6\right)+6=\frac{1}{16}a+\frac{15}{2}\ (\%)$$

となり，3回めの工程Tの後には，容器Aの果汁濃度は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}a+\frac{15}{2}\right)+6=\underline{\underline{\frac{1}{64}a+\frac{63}{8}}}\ (\%)\qquad\text{(答)}$$

となる。

この$\boxed{\text{例題10}}$は，ただたんに解いて終わりにするのではなく，得られた結果が正しいものであるのかを確かめるには，たとえば，$a=8$（%）を代入することもよいでしょう。

その場合，

$$\frac{1}{4}\cdot 8+6=\frac{1}{16}\cdot 8+\frac{15}{2}=\frac{1}{64}\cdot 8+\frac{63}{8}=8$$

であり，容器Ａの果汁濃度は一定であることが確かめられます。

また，この工程Ｔは高校で学ぶ**漸化式**にも対応しており，工程Ｔをn回くり返した後の果汁濃度をx_nとすると

$$x_0=a,\quad x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+6\ (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

となります。中学の数学では，この言葉を使わずとも（**イ**）や（**ウ**）に直結している内容を具現化し，反映しているといえます。

上記の(3)は，とくに「食塩水」の題材として扱われることが多いと思いますが，これらの類の題材は日常生活に直結しているものと言えるでしょう。また，私が中学生のとき，「食塩水」の問題はすでに典型的な問題の１つとして存在しており，当時，私は「ただ解く」ことだけに終始していました。恥ずかしながら「食塩水」の問題は難しいと思っていましたが，時が経つにつれて，これらの問題は基本的な計算の**アルゴリズム**を内包し，**「簡易なシステム」**として成り立っていることに気づきました。「学び」のなかで時を遡ると，それまでに習得した内容がより高度な内容に直結しているということを認識できる体験は，「学び」のおもしろさをより引き立てる要素の１つとなります。それらは年齢を問わずしていくつもの場面でなされるものと考えます。つまり，これらの題材は習得した**文字式のおもしろさ**をあらためて**振り返る**ことができるとともに，**等比数列**や**漸化式**の概念，**複利計算**をはじめとするアルゴリズムにも直結し，（**ア**）～（**エ**）の実現として，「学びのバトン」を実感できるものだと思います。

さて，不等式を礎とする題材は，図形的な側面においても功を奏します。せっかくの機会ですから，それらの一部を見ておきましょう。

例題１１

nは与えられた自然数とし，１辺の長さがn，残り２辺の長さは自然数であり，周の長さが$3n$である△ABCを考える。

(1)　互いに合同でない△ABCは全部で何個できるか答えよ。

(2)　△ABCが鈍角三角形であり，nが４の倍数であるとき，互いに合同でない△ABCは全部で何個できるか答えよ。

（**例題１１** **の略解**）

(1)　与えられた条件から，△ABCの３辺の長さについて，１辺の長さはnであるから，残り２辺のうち１辺の長さをxとすると，残りは

$$3n-(n+x)=2n-x$$

と表せ，$2n-x\geqq x$とすると，これより

$$x\leqq n\qquad\cdots\cdots\ ①$$

である。

このとき，$2n-x$が最大辺となるから，三角形の成立条件より

$$n+x>2n-x$$

すなわち

$$x>\frac{n}{2} \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

であるから，①と②より

$$\frac{n}{2}<x\leqq n \qquad \cdots\cdots \quad ③$$

である。

したがって，③より

・nが偶数のとき，$\dfrac{n}{2}$は自然数であるから，互いに合同でない△ABCは全部で

$$n-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1=\underline{\underline{\frac{n}{2}}} \text{ (個)} \qquad \text{(答)}$$

・nが奇数のとき，$\dfrac{n+1}{2}$は自然数であるから，互いに合同でない△ABCは全部で

$$n-\left(\frac{n+1}{2}\right)+1=\underline{\underline{\frac{n+1}{2}}} \text{ (個)} \qquad \text{(答)}$$

である。

(2)　△ABCが鈍角三角形であるとき，(1) より

$$n^2+x^2<(2n-x)^2$$

すなわち

$$x<\frac{3}{4}n \qquad \cdots\cdots \quad ④$$

である。

したがって，③と④より

$$\frac{n}{2}<x<\frac{3}{4}n \qquad \cdots\cdots \quad ⑤$$

であり，nは4の倍数であるから，$n=4m$(mは正の整数)と表すと，⑤より

$$2m+1\leqq x\leqq 3m-1$$

であるから，互いに合同でない△ABCは全部で

$$(3m-1)-(2m+1)+1=m-1=\underline{\underline{\frac{n-4}{4}}} \text{ (個)}$$

である。

例題１１ の (2) では，nを4の剰余類で場合分けするなどで探究的な素地につながります。次回は，**例題１０** のテーマを主軸にし，学びの知見とその集積の一端に触れながら，これまでと同様に実用的な側面にも対応したいと思います。