三角比の基本定理群は同値である

学習数学研究所　特別顧問

一松　信

要旨

三角形に関する三角比を使った３種の基本定理群：正弦定理，第一余弦定理，第二余弦定理は，それぞれから他が直接に導かれるという意味で互いに同値であることを注意する。併せて若干の「副産物」として，いくつかの公式を導く。

１．扱う問題

三角形ＡＢＣの３個の内角を A，B，C とし，それらに対応する辺長をそれぞれ a，b，c で表す。これらの間に，次の諸関係があることはよく知られている。

<u>正弦定理</u>
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\left(=\frac{1}{2R}\right) \tag{1}$$

ただし本稿では⑴の比の値は問題にしない。

<u>第一余弦定理</u>
$$\begin{cases} b\cos C+c\cos B=a \\ c\cos A+a\cos C=b \\ a\cos B+b\cos A=c \end{cases} \tag{2}$$

<u>第二余弦定理</u>
$$\begin{cases} -a^2+b^2+c^2=2\,bc\cos A \\ a^2-b^2+c^2=2\,ca\cos B \\ a^2+b^2-c^2=2\,ab\cos C \end{cases} \tag{3}$$

これらはそれぞれを直接に幾何学的な方法で証明できるが，その内の一群から他を導出することもできる。その意味で，三個の定理群は互いに同値といってよい。以下その相互関連を示す。三角関数の加法定理などは既知とする。

その証明は現行の高等学校数学の範囲で可能だが，以下では若干逸脱して意義を明確に示した。もっともそれらはすべて「実用数学技能検定」１級の範囲内である。またその「副産物」として，いくつかの有名な公式が導出できることも注意した。

２．第一余弦定理 $\longleftrightarrow$ 第二余弦定理

これはもっとも簡単である。⑵を，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ を未知数とする３元連立一次方程式とみなして解けば⑶を得る。逆は代入して計算すればよい。

⑵を「解く」のは消去法でも可能だが，クラーメルの公式を適用すれば，直ちに

$$\cos A=\frac{ac^2+ab^2-a^3}{2\,abc}=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,bc} \tag{3′}$$

を得る。$\cos B$，$\cos C$ も同様である。

逆に (3´) の形を⑵の第１式に代入すれば

$$b\cos C + c\cos B = \frac{1}{2a}\left[a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2\right] = \frac{2a^2}{2a} = a$$

となる。他の b，c も同様である。

３．正弦定理 ⟷ 第一余弦定理

これは加法定理の応用である。次の公式に注意する。

補助定理１　$A+B+C=2$ 直角のとき

$$\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A=\sin(A+B)=\sin C \tag{4}$$

が成立する。

正弦定理を仮定すれば，(4)から(2)の一つの式

$$a\cos B+b\cos A=c$$

が直ちに導かれる。他も同様である。

逆に(2)を仮定する。これを a，b，c を未知数とする３元連立一次方程式とみなす。その点を明確にするために，線形代数学の基本的な結果を利用して次のようにおく。

$$\text{行列 } M=\begin{bmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} \sin A \\ \sin B \\ \sin C \end{bmatrix} \tag{5}$$

等式(4)から $M\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$（零ベクトル）である。しかし $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ だから，M の行列式は０である。それを展開すれば，次の公式が副産物として得られる。

定理２　$A+B+C=2$ 直角のとき

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1 \tag{6}$$

もちろん定理２は直接にも証明できる（後述）。

さて行列 M の行列式は０だが，その２次の首座小行列式の値は $1-\cos^2 C=\sin^2 C$，他の２次の主小行列式も $\sin^2 B$，$\sin^2 A$ であり，すべて正である。したがって M は階数２であり，０はその単純固有値で，他の固有値は正である。M は二次形式としては準正値であり，M の核は１次元であって $\boldsymbol{v}$ の定数倍で表される。

ところで(2)が成立すれば，それは $M\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ を意味する。ゆえに $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ の定数倍であるが，それは正弦定理に他ならない。

なお M が準正値であることから次の結果を得る。

定理３　x，y，z が実数のとき，次の不等式が成立する。

$$x^2+y^2+z^2\geqq 2(xy\cos C+xz\cos B+yz\cos A) \tag{7}$$

等号は $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ のとき（$x=y=z=0$ も含む）に限る。

よく知られた次の不等式は(7)の特別な場合である：

$$x^2+y^2+z^2\geqq xy+xz+yz\ ;\ \text{等号は } x=y=z \text{ のとき} \tag{7$'$}$$

もちろん(7)は，平方完成，すなわち左辺－右辺を２乗の項の和に変形する方法によって

直接に証明することもできる。

４．正弦定理 ⟷ 第二余弦定理

これは最も厄介である。もちろん前二節の結果から，第一余弦定理を仲介にして証明できるが，以下では直接の証明を試る。

正弦定理→第二余弦定理を示すには，比例関係によって a，b，c をそれぞれ $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ に置き換えた次の式(8)（およびそれを巡回的に動かした式）を，$A+B+C=$２直角の仮定の下に示せばよい。

$$-\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\sin B\sin C\cos A \tag{8}$$

ここで補助定理１（式(4)）から次の等式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 A&=\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C\\ \sin^2 B&=\cos A\sin B\sin C+\sin A\sin B\cos C\\ \sin^2 C&=\sin A\cos B\sin C+\cos A\sin B\sin C\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここで(9)の下の２式の和から第一式を引けば(8)を得る。他も同様である。

なお(9)の３式を加えると

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C) \tag{10}$$

を得る。$\cos(A+B+C)$ を展開して比較すると

$$(10)\text{の右辺}=2[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)]=2+2\cos A\cos B\cos C$$

である。(10)の左辺を $3-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$ として整理すれば，定理２（式(6)）を得る（定理２の一つの別証)。

ただし定理２を直接に証明するのならば，次のように考えた方が早いと思う。

$$\cos^2 A=-\cos A\cdot\cos(B+C)=\cos A\sin B\sin C-\cos A\cos B\cos C$$

同様に $\cos^2 B$，$\cos^2 C$ を表して加えると，次のようになる。

$$\begin{aligned}&\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C\\ &=\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C-\cos A\cos B\cos C\\ &=\sin(A+B)\cdot\sin C-\cos(A+B)\cdot\cos C=-\cos(A+B+C)=1\end{aligned}$$

定理２の等式(6)は有用である。しかしその応用例を論ずるのは本稿の主題から外れるので，これ以上言及しない。

第二余弦定理→正弦定理　(3)から $\cos A$ を a，b，c で表すと以下の等式を得る。

$$1+\cos A=\frac{1}{2bc}(2bc+b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{2bc}(a+b+c)(-a+b+c)$$

$$1-\cos A=\frac{1}{2bc}(2bc-b^2-c^2+a^2)=\frac{1}{2bc}(a-b+c)(a+b-c)$$

この両者を掛ければ

$$\sin^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \tag{11}$$

を得る。したがって $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ は(11)の右辺の分母を $4a^2b^2c^2$ とした式に等しい。その式は a, b, c について対称なので

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2} \tag{12}$$

である。$\sin A$, a などはすべて正なので，(12)の平方根をとれば正弦定理を得る。

ところで三角形の面積を S とすれば

$$2S=bc\sin A$$

である。これに等式(11)を適用すると次の結果を得る：

定理４ $$(4S)^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$=-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \tag{13}$$

定理４は，３辺長 a, b, c から三角形の面積を求めるヘロンの公式と同一である。この導出は，引用文献の第一証明である。この方法を御注意下さった（文献の前身の雑誌記事に対する）応募者に謝意を表明する。

５．むすび

以上第１節の定理群(1)，(2)，(3)が互いに同値であることを示すとともに，いくつかの「副産物」を注意した。第一余弦定理は現在の教科書ではほとんど「忘れられて」いるようだが，(2)を（a, b, c）あるいは（$\cos A$, $\cos B$, $\cos C$）に関する３元連立一次方程式とみなすと有用なことがあるという観点に注目した次第である。

【参考文献】

一松信（2019 年）　『続・創作数学演義』現代数学社，第２部補充③ヘロンの公式の別証明