# 6　実用的な数学の題材 ③

前回は，電気自動車を題材とした簡易な**モデル**をとりあげ，話を進めました。今回は，「**2 次元**」から「**3 次元**」の内容にシフトできるような「**学び**」の話をしていきます。学校での授業内容が，さまざまな場面で実用的に活用されている一例をみておきましょう。

題材は，IoT による**物流**についての簡易な**モデル**です。ここでは，ドローンを利用した配送に関する考察を行えるように設定しました。このような簡易なモデルによって，高校で学ぶ**ベクトル**の意義が深まれば幸いです。

**例題 9**

ある民間企業の施設内では，ドローンを用いて，物を配送するシステムを導入している。

そこで，この施設内にドローンを監視し統制することができる 4 つの管制柱（頂点をそれぞれ A，B，C，D とする）があり，これらは空間において固定されており，同一平面上にないものとする。

また，次のような 4 つの点 E，F，G，H を定める。

線分 AB を $1:4$ に内分する点を E，線分 CD を $2:3$ に内分する点を F，

線分 BC を $1:1$ に内分する点を G，線分 DA を $6:1$ に内分する点を H とする。

2 つのドローン P と Q は，次の条件を満たすものとする。

**条件**

・ドローン P は時刻 $t=0$ に点 E，時刻 $t=1$ に点 F をそれぞれ通過し，直線 EF 上を航行する。

・ドローン Q は時刻 $t=0$ に点 G，時刻 $t=1$ に点 H をそれぞれ通過し，直線 GH 上を航行する。

このとき，管制柱から 2 つのドローンが衝突する可能性がある危険信号が発信された。時刻 $t$ の単位は分とし，管制柱 A を基準とする位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ と定め，2 つのドローン P と Q が衝突するかどうかを考える。ただし，2 つのドローンは点とみなすものとする。

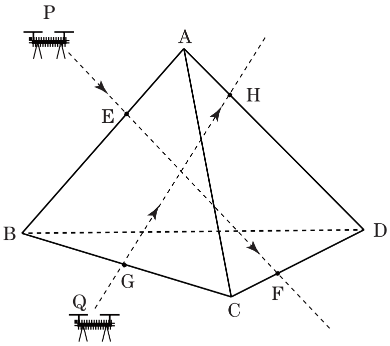
(1)　ドローン P の時刻 $t$ における位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$t$ を用いて表せ。

(2)　ドローン Q の時刻 $t$ における位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$t$ を用いて表せ。

(3)　2 つのドローン P と Q が衝突するかどうかを述べよ。

(4)　直線 EF と GH が交点 I をもつことを証明せよ。また，このとき，$\mathrm{EI}:\mathrm{IF}$ と $\mathrm{GI}:\mathrm{IH}$ をもっとも簡単な整数の比で表せ。

（$\boxed{\text{例題９}}$ の略解）




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + t\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + t(\overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}})$$

$$= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

$$= (1-t)\left(\frac{1}{5}\vec{b}\right) + t\left(\frac{3\vec{c}+2\vec{d}}{5}\right)$$

$$= \frac{1-t}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}t\vec{c} + \frac{2}{5}t\vec{d}$$　（答）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} + t\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} + t(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AG}})$$

$$= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AG}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

$$= (1-t)\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) + t\left(\frac{1}{7}\vec{d}\right)$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{b} + \frac{1-t}{2}\vec{c} + \frac{1}{7}t\vec{d}$$　（答）

(3)　2つのドローンPとQが衝突すると仮定すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ が一致する $t$ が存在する。

$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は一次独立より，(1) と (2) の $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ の係数について

$$\frac{1-t}{5} = \frac{1-t}{2},\quad \frac{3}{5}t = \frac{1-t}{2},\quad \frac{2}{5}t = \frac{1}{7}t$$

とすると，第１式，第３式を満たす $t$ の値はそれぞれ

$$t = 1,\ 0$$

であるが，時刻 $t=0,\ 1$ では，2つのドローンPとQは衝突しない。

また，第２式を満たす $t$ の値は

$$t = \frac{5}{11}$$

であり，このとき，2つのドローンPとQの位置はそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{6}{55}\vec{b} + \frac{3}{11}\vec{c} + \frac{2}{11}\vec{d},\qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{3}{11}\vec{b} + \frac{3}{11}\vec{c} + \frac{5}{77}\vec{d}$$

であるが，これらは一致せず，2つのドローンPとQは衝突しない。

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たす時刻 $t$ が存在しないから，2つのドローンPとQは衝突しないことがわかる。　（答）

(4)　(1) と (2) より，実数 $p$，$q$ を用いて，2つのドローンPとQの位置はそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1-p}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}p\vec{c} + \frac{2}{5}p\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1-q}{2}\vec{b} + \frac{1-q}{2}\vec{c} + \frac{1}{7}q\vec{d}$$

と表せる。2 つの直線 EF，GH が交点をもつとすると，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ の係数について

$$\frac{1-p}{5}=\frac{1-q}{2},\quad \frac{3}{5}p=\frac{1-q}{2},\quad \frac{2}{5}p=\frac{1}{7}q$$

が成り立つ $p$，$q$ が存在することと同値である。このとき，第 3 式から

$$q=\frac{14}{5}p \quad \cdots\cdots \quad ①$$

であり，これを第 1 式に用いると

$$p=\frac{1}{4},\ q=\frac{7}{10} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

が得られる。

このとき，②の $p$，$q$ の値を第 2 式に用いると，左辺と右辺は等しい値 $\frac{3}{20}$ をとることから，直線 EF と GH は交点 I をもつことが示せた（2 つのドローン P と Q が別の条件によっては，衝突しうる可能性があることを示唆している）。

また，②の $p$，$q$ の値に対し，2 つのドローン P と Q の位置はそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{4},\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\frac{7}{10}\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AG}}+7\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{10}$$

より

$$\mathrm{EI}:\mathrm{IF}=\underline{\underline{1:3}},\quad \mathrm{GI}:\mathrm{IH}=\underline{\underline{7:3}} \qquad \textbf{(答)}$$

であることがわかる。

このように，2 つのドローン P と Q を用いて，簡易な**モデル**を考えましたが，これらの類題は大学入試などでもこれまで多く扱われているものと考えられます。たとえば，次のような問題もそれにあてはまります。

**参考問題**

座標空間において，点 A $(-1,\ 3,\ 2)$ を通り $\vec{l}=(-1,\ 2,\ 0)$ に平行な直線を $l$，また，点 B $(1,\ 3,\ 0)$ を通り $\vec{m}=(-1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を $m$ とする。

2 つの点 P，Q について，点 P は直線 $l$ 上を動き，点 Q は直線 $m$ 上を動くものとするとき，2 点間の距離 PQ が最小となる点 P と Q の座標をそれぞれ求め，そのときの距離を求めよ。

（**参考問題** **の略解**）

一般に，空間における 2 つの直線の最短距離は，各直線とその共通垂線との交点間の距離に等しいことから，2 点間の距離 PQ が最小であるならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{l}=0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{m}=0 \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

である。

ここで，$s$，$t$を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-s \\ 3+2s \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 3+t \\ -t \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

と表されるから，これより

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} -t+1 \\ t+3 \\ -t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s-1 \\ 2s+3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t+2 \\ -2s+t \\ -t-2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ④$$

であり，（＊）より

$$\begin{pmatrix} s-t+2 \\ -2s+t \\ -t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} s-t+2 \\ -2s+t \\ -t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

すなわち

$$-5s+3t=2, \quad -3s+3t=0$$

である。

したがって，

$$s=t=-1$$

であるから，2 点間の距離 PQ が最小となる P と Q の座標は，それぞれ③より

$\underline{\underline{\mathrm{P}(0,1,2)}}$，　$\underline{\underline{\mathrm{Q}(2,2,1)}}$　　　**（答）**

である。このとき，PQ の距離は

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$　　　**（答）**

である。

**（別解）**

④より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{(s-t+2)^2+(-2s+t)^2+(-t-2)^2}$$

であり，これは次のように変形できる。すなわち

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{5s^2+3t^2-6st+4s+8} = \sqrt{3(s-t)^2+2(s+1)^2+6}$$

であるから

$s=t$ かつ $s=-1$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は最小となる。

したがって，③より

$\mathrm{P}(0,1,2)$，　$\mathrm{Q}(2,2,1)$

であり，このとき，PQ の距離は

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{6}$$

である。