

先月からの内容は、中学・高校の教科書で述べられている内容を活かし、それらがどのような形で私たちの生活に応用されているのか、または、それらを通して今後どのような「学び」を取り入れそれを他者とともに実践・協働していかなければならないのかについて述べています。その「学び」のあり方は、**高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説**にも掲載されており、「**解く**」過程を楽しむ「**学び**」をめざしているものでしょう。

さて、今月も中学・高校で習得することが、どのような形で利活用されているのかという、簡易な**数理モデル**を通して、中学数学と高校数学の橋渡しとなるような題材を取り上げたいと思います。次の**例題8**は、時代が求める**Society5.0**に向けての「**教育**」に含まれる内容であり、また、政府の「**2050年カーボンニュートラルに伴うグリーン成長戦略**」の重点14分野における「**自動車・蓄電池産業**」や「**物流・人流・土木インフラ産業**」に関連のある内容として、とりあげることができる題材の1つです。いまや時代は、IoT（Internet of Things）による整備拡充のなか、自動車の自動運転技術についての研究や実験は幅広く促進され、**物流**についてはドローンを活用した配送なども考えられています。そこで、2次元における簡易モデルから考えることにしましょう。

例題8

Oを原点とする xy 平面上において、電気自動車A（以下、電動車）は点(0, 5)から出発し、電動車Aの t 分後の位置は、次の式で表される。

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -4t + 5 \end{cases}$$

一方、電動車Bは点(35, 0)から、電動車Aが一直線に進む道路に直交する道路（直線上）を進むものとし、電動車Aの道路と電動車Bの道路の交差点をCとする。2台の電動車は交差点Cに向かって進むとき、次の問いに答えよ。ただし、2台の電動車の大きさは考えず点とみなし、道路上における風の向きや風の速さの影響は考えないものとする。

- (1) 電動車Bが電動車Aの3倍の速さで進むとき、電動車Aと電動車Bが衝突するのは、電動車Bが電動車Aより何分遅れて出発したときかを答えよ。
- (2) 電動車Aは(0, 5)、電動車Bは(35, 0)を同時に出発し、同じ速さで交差点Cに向かうものとする。ここで、電動車Aは出発してから2分後、電動車Bは出発してから1分後に信号機で一旦停止し、停止した位置をそれぞれP, Qとする。2台の電動車は再びP, Qから同時に出発し、同じ速さで交差点Cに向かうとき、電動車AとBの距離がもっとも短くなるのは、何分後になるか答えよ。

この **例題 8** は、できる限り複雑な計算を避け、簡易な**モデル**として対応しました。ただ単に、問題を「**解く**」ことばかりに目を向けるのではなく、たとえば、4点 A, O, C, B は同一円周上に存在するというエッセンスも含めています。このように、1つの題材でいくつかの数学的な観点を確認することは、問題全体の状況を把握することにもつながり、新たな「**学び**」や視野の拡充が促進される可能性もあります。また、そのような考察からは、他分野と有機的につながることで、他の側面からのアプローチを見出すことができ、それによって新たな学びのプラットフォームの形成につながることもあるでしょう。

さて、中学校で習得する直線の式（方程式）について、2つの直線が直交するとき、それらの2つの直線の傾きの積が -1 であるという、いわゆる、直交条件はいまや中学においては学習指導要領の範囲外とはなりますが、これは中学3年生で学ぶ三平方の定理などによってそれを教示することはできるかと思います。ここでは、媒介変数 t を用いて表現をしているように、 $t=1$ のときや $t=2$ のときなどの位置（座標）を考察することによって、中学生においても直線の式（方程式）を導出することはできるものと考えます。さらに、高校で学ぶ**ベクトル**の意義についても確認することができるものだと思います。

例題 8 の略解

(1) 与えられている式から、電動車 A が出発してから t 分後の位置 (x, y) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{①}$$

である。

また、これに対し、電動車 B は $(35, 0)$ を出発し、電動車 A が進む一直線の道路に対し、それに直交する直線上を電動車 A の3倍の速さで動くから、ベクトルの向きに注意すると、電動車 B の出発後の t 分後の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{②}$$

と表せる。

ここで、電動車 B が、電動車 A より d 分遅れて出発するとき、電動車 B の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-d) \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix} \quad (t \geq d) \quad \dots\dots \text{③}$$

と表せるから、電動車 A と B が衝突するのは、①と③より

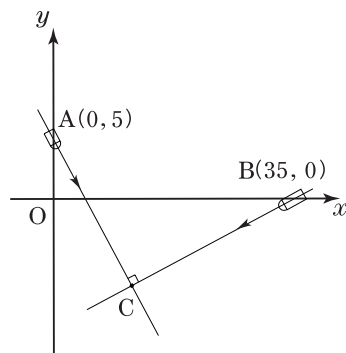
$$\begin{cases} 3t = 35 - 12(t-d) \\ 5 - 4t = -9(t-d) \end{cases} \quad \dots\dots \text{④}$$

を満たす t と d が存在するときである。

このとき、④から

$$t = 5, \quad d = \frac{10}{3}$$

であるから、電動車 B は電動車 A が出発してから



$$\underline{\underline{\frac{10}{3}} \text{分後}} \quad (\text{答})$$

に出発すると、2台の電動車は交差点Cで衝突することがわかる。

また、 $t=5$ であるから、電動車Aは(0, 5)を出発して5分後に交差点Cで電動車Bに衝突することになる。

(2) 電動車Aは出発後、ちょうど2分後に停止する。その位置(座標)Pは与えられた式に $t=2$ を代入すると得られるから、 $P(6, -3)$ である。

一方、電動車Bは(35, 0)から電動車Aと同じ速さで同時に出発するとき、電動車Bの出発後の t 分後の位置は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{⑤}$$

と表せるから、電動車Bが1分後に止まるその位置(座標)Qは、⑤で $t=1$ を代入すれば得られるから、 $Q(31, -3)$ である。

そこで、再び電動車AとBが、それぞれP, Qから交差点Cに向かって同じ速さで向かうとき、 T 分後の2台の電動車AとBのそれぞれの位置 A_T, B_T は

$$A_T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad B_T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -3 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表せ、

$$\overrightarrow{A_T B_T} = \begin{pmatrix} -4T + 31 \\ -3T - 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3T + 6 \\ -4T - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7T + 25 \\ T \end{pmatrix}$$

であるから、電動車AとBの距離を $f(T)$ とすると

$$f(T) = |\overrightarrow{A_T B_T}| = \sqrt{(-7T + 25)^2 + T^2} = 5\sqrt{2\left(T - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

である。

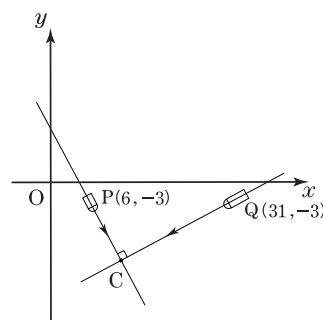
したがって、停止していた電動車AとBが、それぞれP, Qから同時に交差点Cに向かうとき、

$$T = \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \text{ (分後)} \quad (\text{答})$$

に電動車AとBの距離はもっとも短くなり、その距離は

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

であることがわかる。



今回は、これらの内容を2次元から3次元にシフトする「学び」について、その1例を考えてみることにしましょう。