

自然方陣の汎対角線に潜む相愛数構造

——謎の対称性はなぜ生まれ、どこまで続くのか——

竹村 謙一

Independent Researcher (Tokyo, Japan)

概要

1 から n^2 までを順に並べた n 次自然方陣における汎対角線に着目すると、そこには「相愛数 (soaisu)」——Prouhet–Tarry–Escott 型の等幕和構造——が現れます。本稿では 3 次、4 次、5 次の具体例から出発し、この相愛数構造が正方形の対称群 D_4 の 8 つの操作のもとで保存される様子を観察し、一般の n に対して 2 乗和の閉形式を与えてこれを証明します。

MSC2020 : 11D72 ; 05E18 ; 00A08

キーワード : 自然方陣, 汎対角線, 相愛数, D_4 対称性, Prouhet–Tarry–Escott 問題

1 はじめに

下の図は 1 から 100 まで、左から右、上から下へ順番に並べた方陣です。これを **10 次自然方陣** といいます。

10 次自然方陣

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

このような一見すると、何の工夫もない、ただの数の配列にも実は思いもよらない不思議な性質が見られます。本稿では、相愛数や汎対角線という概念を使って、そのことを明らかにするつもりです。

さあ、まず、この旅に必要な 3 つの道具を揃えましょう。

道具 1：自然方陣

1 から n^2 までの自然数を、左から右、上から下へ順番に並べた $n \times n$ の配列を n 次自然方陣という。
 i 行 j 列のマスに書かれた数は $n(i-1) + j$ である ($i, j = 1, 2, \dots, n$)。

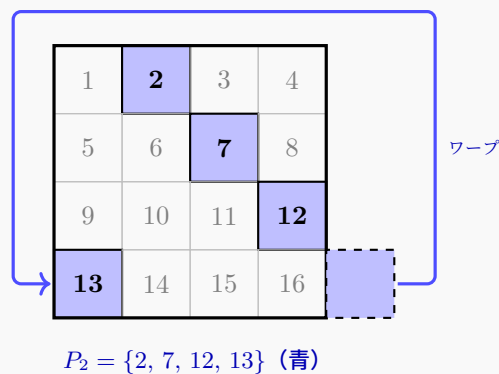
3 次 ($n = 3$)			4 次 ($n = 4$)				5 次 ($n = 5$)				
1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
4	5	6	5	6	7	8	6	7	8	9	10
7	8	9	9	10	11	12	11	12	13	14	15
			13	14	15	16	16	17	18	19	20
							21	22	23	24	25

道具 2：汎対角線

n 次自然方陣を世界地図のようなものとみなし、端を超えると反対側にワープする仮想的な平面とみなす。この方陣上で、右下がり（主方向）または左下がり（副方向）の n マスに一直線に並ぶラインを 汎対角線 (pan-diagonal) という。

n 次自然方陣には主方向に n 本、副方向に n 本、合計 $2n$ 本の汎対角線が存在する。主方向の汎対角線を $P_1, P_2, \dots, P_n$ 、副方向の汎対角線を $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ とする。

汎対角線のイメージ 右の端から出ると左の端に戻ってくる——ゲームでよくある「画面の端から出ると反対側からワープして現れる」あのイメージです。下の図で 4 次自然方陣の P_2 (青) の場合では、4 行目で右端を超えた次のマスが、左端の 13 に「ワープして」います。



道具 3：相愛数 (Soaisu)

整数の集合 $A_1, A_2, \dots, A_m$ (各集合の要素の個数は等しいとする) について、 $l = 1, 2, \dots, k$ のすべてにおいて、各集合におけるすべての要素の l 乗和が等しい、すなわち

$$\sum_{a \in A_1} a^l = \sum_{a \in A_2} a^l = \dots = \sum_{a \in A_m} a^l$$

が成り立つとき、これらを**強度 k の相愛数**と呼ぶ。強度は ♡ の個数で表す (強度 1 を ♡、強度 2 を ♡♡、...)。さらに、各集合の要素の個数が r のときは「 r - r 相愛数」のように要素の個数も合わせて書き表す (3 個の集合なら r - r - r のように個数分だけ並べる)。

例： $A_1 = \{2, 8, 9, 15\}$ と $A_2 = \{3, 5, 12, 14\}$

- 1 乗和： $2 + 8 + 9 + 15 = 34 = 3 + 5 + 12 + 14$
- 2 乗和： $2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2 = 374 = 3^2 + 5^2 + 12^2 + 14^2$
- 3 乗和： $2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3 = 4624 = 3^3 + 5^3 + 12^3 + 14^3$
- 4 乗和： $2^4 + 8^4 + 9^4 + 15^4 = 61298 \neq 59858 = 3^4 + 5^4 + 12^4 + 14^4$

1 乗和、2 乗和、3 乗和が一致し、4 乗和で初めて不一致となるので、これら A_1 と A_2 は **4-4 相愛数 ♡♡♡** と表現される。

これで必要な準備が整いました。なお、すべての汎対角線について、マスに書かれた数の 1 乗和は共通の値 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ($n = 3$ なら 15、 $n = 4$ なら 34、 $n = 5$ なら 65) をとることが知られています。したがって相愛数としての実質的な比較は **2 乗和以降** から始まります。

言葉だけの説明ではイメージがなかなかつかめないと思います。実際に 3 次自然方陣を例に見てみることにしましょう。

2 3 次自然方陣の汎対角線で何が起きているか?

3 次自然方陣の 6 本の汎対角線を図1に示します。

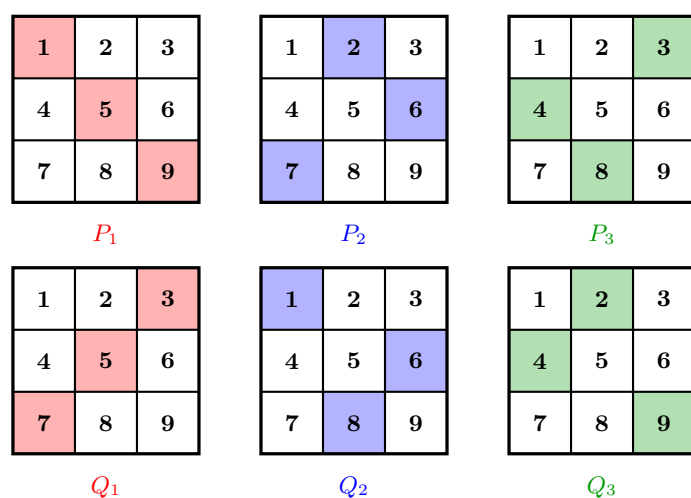


図1 3次自然方陣の6本の汎対角線

$P_1 \sim P_3$ 、 $Q_1 \sim Q_3$ のそれぞれのマスに書かれた数の1乗和、2乗和、3乗和を計算してみましょう。

表1 3次自然方陣における各汎対角線の冪乗和

方向	集合 (要素)	1 乗和	2 乗和	3 乗和
主	$P_1 = \{1, 5, 9\}$	15	107	855
主	$P_2 = \{2, 6, 7\}$	15	89	567
主	$P_3 = \{3, 4, 8\}$	15	89	603
副	$Q_1 = \{3, 5, 7\}$	15	83	495
副	$Q_2 = \{1, 6, 8\}$	15	101	729
副	$Q_3 = \{2, 4, 9\}$	15	101	801

1乗和はすべての集合で15と一致しています。そして、2乗和についても、ちょっと興味深いことが起きているようです。

- 主方向： P_2 と P_3 の2乗和がともに **89** で一致
- 副方向： Q_2 と Q_3 の2乗和がともに **101** で一致

$\{2, 6, 7\}$ と $\{3, 4, 8\}$ のペア、及び $\{1, 6, 8\}$ と $\{2, 4, 9\}$ のペアは1乗和と2乗和がそれぞれ一致しています。ただし3乗和は一致していません。したがって、これらはいずれも **3-3 相愛数** ♡♡ です。

また、ここで忘れずに留意しておきたいこととして、 P_1 (2乗和 107) と Q_1 (2乗和 83) は他のどの集合とも2乗和が一致せず、孤立してしまっているということです。

3 次自然方陣の相愛数構造

主方向では P_2 と P_3 が♡♡の相愛数ペアをなす（2乗和は89）。

副方向では Q_2 と Q_3 が♡♡の相愛数ペアをなす（2乗和は101）。

P_1 , Q_1 は孤立している（他の集合と2乗和が一致しない）。

3 汎対角線を「回転」させると何が起こるか

ここで、汎対角線のパターン（柄）を 90° 回転させてみましょう。注意点として、ここで「回転させる」のは、汎対角線のパターンだけです。自然方陣の中の数の配列（1 から 9 の並び）は、一切動かしません。

イメージとしては、自然方陣の上に、汎対角線の位置を示す色つきの窓枠がある透明なフィルターがかぶせてあるとします。自然方陣はそのまま固定し、フィルターだけを 90° 回転させます。その結果、フィルターの色つきの窓枠に収まる数の組合せが変わり、新しい汎対角線が現れます。

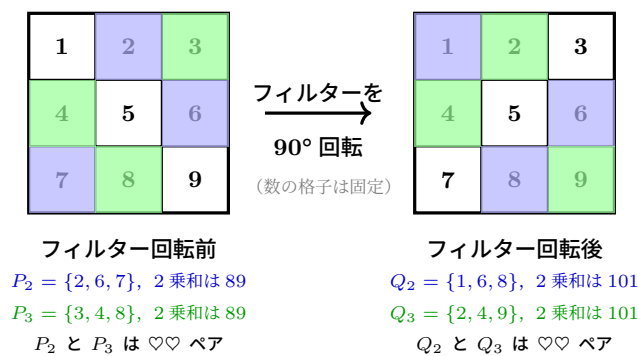


図2 フィルターの回転前と回転後

図2をよく見てください。左と右で変わったのはフィルターの向きだけで1 から 9 の並びはまったく同じです。

それでも♡♡の相愛関係は保存されました。

90° 回転における相愛関係の保存

回転前： P_2 と P_3 が♡♡ペア（2乗和は89）

回転後： Q_2 と Q_3 が♡♡ペア（2乗和は101）

2乗和の値は異なっているものの「2本の汎対角線が♡♡で結ばれている」という関係は成り立っている。

※ 本稿では以降、1乗和と2乗和がともに一致する「強度2の相愛関係」にあるペアを、単に♡♡ペアと表記します。

これが今回の核心のテーマです。「フィルターをどう動かしても♡♡の関係が成り立つ」という性質は、どうやら 90° 回転だけでなく、180° 回転、左右反転、上下反転など正方形の 8 種の対称操作すべてに対しても成り立つようです。次節以降で 4 次、5 次より大きなサイズの例を見ながら、この謎をさらに掘り下げていきます。

4 4 次、5 次自然方陣でも同じことが起きている!?

3 次自然方陣で発見した「相愛関係は 90° 回転させても保存される」現象は、4 次、5 次自然方陣でも成り立つのでしょうか。確かめてみましょう。

4 次自然方陣の場合

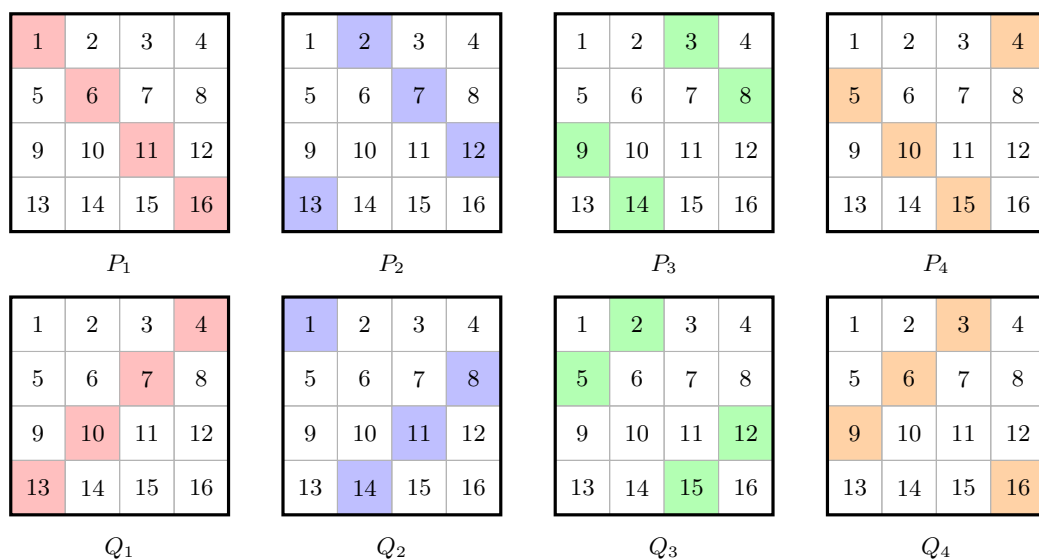


図3 4 次自然方陣の 8 本の汎対角線

i, j はそれぞれ 1 から始まる行番号と列番号を表します。 i 行 j 列のマスを含む汎対角線の集合 P_k, Q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) について、 i, j, k の間に次の関係が成り立ちます。

$$P_k: k \equiv 1 - i + j \pmod{4}$$

$$Q_k: k \equiv i + j \pmod{4}$$

表2 4次自然方陣における各汎対角線の乗和

方向	集合 (要素)	1 乗和	2 乗和	3 乗和
主	$P_1 = \{1, 6, 11, 16\}$	34	414	5644
主	$P_2 = \{2, 7, 12, 13\}$	34	366	4276
主	$P_3 = \{3, 8, 9, 14\}$	34	350	4012
主	$P_4 = \{4, 5, 10, 15\}$	34	366	4564
副	$Q_1 = \{4, 7, 10, 13\}$	34	334	3604
副	$Q_2 = \{1, 8, 11, 14\}$	34	382	4588
副	$Q_3 = \{2, 5, 12, 15\}$	34	398	5236
副	$Q_4 = \{3, 6, 9, 16\}$	34	382	5068

- 主方向： P_2 と P_4 の 2 乗和がともに 366 (4-4 相愛数 ♡♡)
- 副方向： Q_2 と Q_4 の 2 乗和がともに 382 (4-4 相愛数 ♡♡)

ここで記述を簡素化するために r_{90} という記号を導入することにします。 r_{90} は方陣全体を覆っている、正方形の 2 本の対角線の交点 (つまり方陣の中央) を中心として「汎対角線フィルターを時計回りに 90° 回転させる操作」を表します (前節で述べた通り、自然方陣は固定したままです)。この操作は汎対角線を次のように移動させます。

$$r_{90}: P_k \longrightarrow Q_k$$

つまりフィルターを 90° 回転させると、 P_k は Q_k に移ります。また、 r_{90} によって Q_k が $P_{k'}$ に移るものとする、 n 次自然方陣において

$$k' \equiv n + 2 - k \pmod{n}$$

という関係が成り立ちます。ただし、 k と k' はどちらも n 以下の自然数とします。(たとえば $n = 4$ のとき、 $k = 1 \rightarrow k' = 1$ 、 $k = 2 \rightarrow k' = 4$ 、 $k = 3 \rightarrow k' = 3$ 、 $k = 4 \rightarrow k' = 2$)

上記で定義した k' によって

$$r_{90}: Q_k \longrightarrow P_{k'}$$

と移ります。

実際、4 次では r_{90} という操作によって $P_2 \rightarrow Q_2$ 、 $P_4 \rightarrow Q_4$ 、 $Q_2 \rightarrow P_4$ 、 $Q_4 \rightarrow P_2$ と移ります。 P_2 と P_4 の 2 乗和が一致 (= 366) しているため、その移動先である Q_2 と Q_4 の 2 乗和も一致 (= 382) するということになります。

5 次自然方陣の場合：横断グループの出現

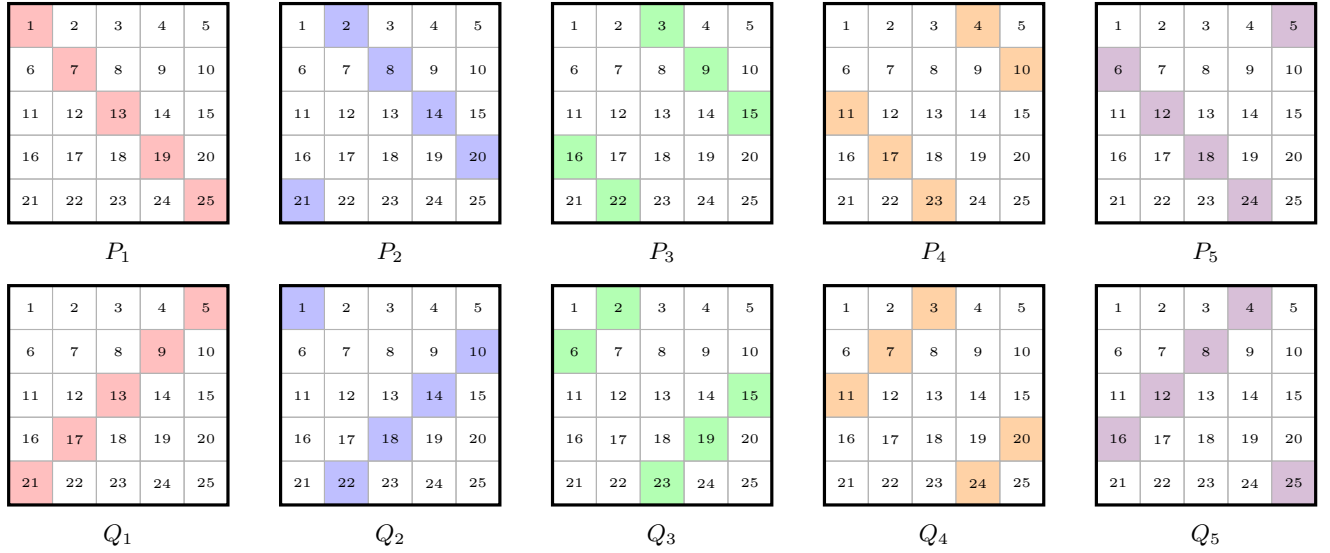


図4 5 次自然方陣の 10 本の汎対角線

i, j はそれぞれ 1 から始まる行番号と列番号を表します。 i 行 j 列のマスを含む汎対角線の集合 P_k, Q_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) について、 i, j, k の間に次の関係が成り立ちます。

$$P_k: k \equiv 1 - i + j \pmod{5}$$

$$Q_k: k \equiv i + j \pmod{5}$$

表3 5 次自然方陣における各汎対角線の冪乗和

方向	集合 (要素)	1 乗和	2 乗和	3 乗和
主	$P_1 = \{1, 7, 13, 19, 25\}$	65	1205	25025
主	$P_2 = \{2, 8, 14, 20, 21\}$	65	1105	20525
主	$P_3 = \{3, 9, 15, 16, 22\}$	65	1055	18875
主	$P_4 = \{4, 10, 11, 17, 23\}$	65	1055	19475
主	$P_5 = \{5, 6, 12, 18, 24\}$	65	1105	21725
副	$Q_1 = \{5, 9, 13, 17, 21\}$	65	1005	17225
副	$Q_2 = \{1, 10, 14, 18, 22\}$	65	1105	20225
副	$Q_3 = \{2, 6, 15, 19, 23\}$	65	1155	22625
副	$Q_4 = \{3, 7, 11, 20, 24\}$	65	1155	23525
副	$Q_5 = \{4, 8, 12, 16, 25\}$	65	1105	22025

5 次自然方阵においては、さらに驚くべきことが起こっているようです。そうです。2 乗和が 1105 になっている集合が 4 つ (P_2 、 P_5 、 Q_2 、 Q_5) あります。

主方向と副方向にまたがる 5-5-5-5 相愛数 ♡♡

P_2 、 P_5 、 Q_2 、 Q_5 の 2 乗和は 1105 で一致しているため、これらは 5-5-5-5 相愛数 ♡♡ をなしています。また主方向と副方向に分けて考えた場合、主方向 (P_2 と P_5) と (P_3 と P_4)、副方向 (Q_2 と Q_5) と (Q_3 と Q_4) がそれぞれ 5-5 相愛数 ♡♡ となります。

これを相愛数の関係図 (模式図) で表すと次のようになります (P_1 、 Q_1 は孤立)。

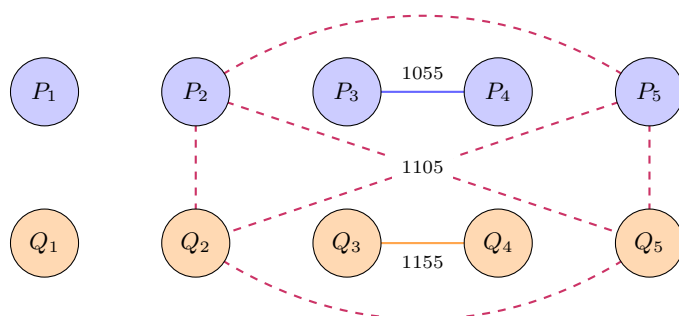


図5 5 次自然方阵における相愛数の関係図

正方形の 8 種の回転移動、対称移動

ここで、「どのような操作のもとで相愛数の関係が保存されるか」を整理するために、正方形の回転移動、対称移動の操作全体をきちんと導入しましょう。

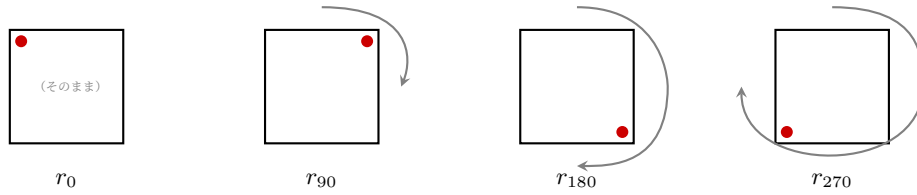
正方形をそれ自身にぴったり重ねる操作には、回転 4 種と反転 4 種の合わせて **8 種** あります。ただし、回転の中心は方阵の中央とします。

表4 正方形をそれ自身にぴったり重ねる操作

操作の種類	記号	操作の内容
0° 回転 (恒等)	r_0	何もしない
90° 回転	r_{90}	フィルターを時計回りに 90° 回す
180° 回転	r_{180}	フィルターを 180° 回す
270° 回転	r_{270}	フィルターを時計回りに 270° (反時計回りに 90°) 回す
左右対称 (90° 軸)	s_{90}	フィルターを左右に反転させる
上下対称 (0° 軸)	s_0	フィルターを上下に反転させる
対角線対称 (135° 軸)	s_{135}	左上-右下の対角線で反転させる
対角線対称 (45° 軸)	s_{45}	右上-左下の対角線で反転させる

※ r : rotation (回転)、 s : symmetry (対称) の頭文字を使用しています。

【回転移動による操作】



【対称移動による操作】(青破線は対称軸)

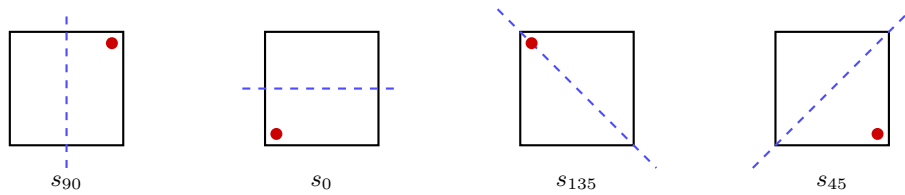


図6 8種の操作の視覚的イメージ (赤丸は1行1列目のマス)

P_k や Q_k を、これら8種の操作によって移します。

k' は、前節で導入した式

$$k' \equiv n + 2 - k \pmod{n}$$

を引き続き用います。ただし、 k と k' はどちらも n 以下の自然数とします。この式は $k = 1$ のとき $k' = 1$ 、 $k \geq 2$ のとき $k' = n + 2 - k$ と一致します。

表5 各操作および P_k 、 Q_k の移動先

操作	P_k の移動先	Q_k の移動先
r_0	P_k	Q_k
r_{90}	Q_k	$P_{k'}$
r_{180}	$P_{k'}$	$Q_{k'}$
r_{270}	$Q_{k'}$	P_k
s_{90}	$Q_{k'}$	$P_{k'}$
s_0	Q_k	P_k
s_{135}	$P_{k'}$	Q_k
s_{45}	P_k	$Q_{k'}$

4 次自然方阵で、先述した以下の 2 組の 4-4 相愛数 ♡♡ を例に確かめてみましょう。

- 主方向： P_2 と P_4 の 2 乗和がともに 366 (4-4 相愛数 ♡♡)
- 副方向： Q_2 と Q_4 の 2 乗和がともに 382 (4-4 相愛数 ♡♡)

$n = 4$ において、 $k = 2$ のとき $k' = 4$ 、 $k = 4$ のとき $k' = 2$ となり、 $P_2 \leftrightarrow P_4$ 、および $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ の入れ替えが生じます。表 6 は、8 種の操作および P_2 、 P_4 の移動先で () 内の数は 2 乗和を表します。

表6 $n = 4$ のときの各操作および P_2 、 P_4 の移動先

操作	P_2 の移動先	P_4 の移動先
r_0	P_2 (366)	P_4 (366)
r_{90}	Q_2 (382)	Q_4 (382)
r_{180}	P_4 (366)	P_2 (366)
r_{270}	Q_4 (382)	Q_2 (382)
s_{90}	Q_4 (382)	Q_2 (382)
s_0	Q_2 (382)	Q_4 (382)
s_{135}	P_4 (366)	P_2 (366)
s_{45}	P_2 (366)	P_4 (366)

※ () は 2 乗和

r_0 、 r_{180} 、 s_{135} 、 s_{45} の操作においては、 P_2 と P_4 は 2 乗和の値を保ったまま、自分自身に移るか互いに入れ替わりますが、 r_{90} 、 r_{270} 、 s_{90} 、 s_0 の操作においては Q_2 や Q_4 に移ります。

5 次自然方阵においても同様の現象が観察されます。

$n = 5$ において、 $k = 2$ のとき $k' = 5$ 、 $k = 3$ のとき $k' = 4$ 、 $k = 4$ のとき $k' = 3$ 、 $k = 5$ のとき $k' = 2$ となり、 $P_2 \leftrightarrow P_5$ 、 $P_3 \leftrightarrow P_4$ および $Q_2 \leftrightarrow Q_5$ 、 $Q_3 \leftrightarrow Q_4$ の入れ替えが生じます。表 7 は、8 種の操作および $P_2 \sim P_5$ の移動先を表します。

表7 $n = 5$ のときの各操作および $P_2 \sim P_5$ の移動先

操作	P_2 の移動先	P_5 の移動先	P_3 の移動先	P_4 の移動先
r_0	P_2 (1105)	P_5 (1105)	P_3 (1055)	P_4 (1055)
r_{90}	Q_2 (1105)	Q_5 (1105)	Q_3 (1155)	Q_4 (1155)
r_{180}	P_5 (1105)	P_2 (1105)	P_4 (1055)	P_3 (1055)
r_{270}	Q_5 (1105)	Q_2 (1105)	Q_4 (1155)	Q_3 (1155)
s_{90}	Q_5 (1105)	Q_2 (1105)	Q_4 (1155)	Q_3 (1155)
s_0	Q_2 (1105)	Q_5 (1105)	Q_3 (1155)	Q_4 (1155)
s_{135}	P_5 (1105)	P_2 (1105)	P_4 (1055)	P_3 (1055)
s_{45}	P_2 (1105)	P_5 (1105)	P_3 (1055)	P_4 (1055)

※ () は 2 乗和

実は、この驚くべき対称性は 4 次や 5 次に限った偶然ではなく、任意の n 次自然方陣において普遍的に成立することが数学的に証明可能です。

5 n 次自然方陣における検証

2 乗和は一致するのか

これより、任意の n 次自然方陣における各汎対角線について一般公式（閉形式）を導出し、8 種の操作を使うことによって 2 乗和が一致することを証明します。

ステップ 1：2 乗和の閉形式を導く

①マス目に書かれた数を式で表す

n 次自然方陣で、 P_k に属する i 行 j 列のマス目について、次の関係が成り立ちます。

$$j \equiv i + k - 1 \pmod{n} \quad (i, j \text{ は } n \text{ 以下の自然数})$$

また、マス目に書かれた数は $n(i - 1) + j$ です。

mod を使わずに表すため、場合分けを行います。

$$j = \begin{cases} i + k - 1 & (i \leq n - k + 1) \\ i + k - 1 - n & (i \geq n - k + 2) \end{cases}$$

下の式は $i \geq n - k + 2$ を満たす部分で「汎対角線が右端をはみ出して左端へワープする」ことを示しています。下の式は上の式から n を引いた形になっており、後の計算でこの「補正 $-n$ 」を活用します。

②汎対角線 P_k のマス目に書かれた数の 2 乗和を求める

ここで $p_t(L)$ という記号を導入します。汎対角線 L 上にあるマスに書かれたそれぞれの数の t 乗和を

$$p_t(L) = \sum_{x \in L} x^t$$

と書きます ($t = 1$ が 1 乗和、 $t = 2$ が 2 乗和、 $\dots$)。

ここで汎対角線 P_k のマス目に書かれた数 $n(i-1) + j$ の 2 乗和 $p_2(P_k)$ は

$$\begin{aligned} p_2(P_k) &= \sum_{i=1}^n \{n(i-1) + j\}^2 \\ &= \underbrace{n^2 \sum_{i=1}^n (i-1)^2}_{\text{第 1 項}} + \underbrace{2n \sum_{i=1}^n (i-1)j}_{\text{第 2 項}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n j^2}_{\text{第 3 項}}. \end{aligned}$$

第 1 項の $\sum_{i=1}^n (i-1)^2$ の値は $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ となります。第 3 項は、 j は i の関数で 1 から n の値を 1 つずつとるため、 $\sum_{i=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であり、第 1 項と第 3 項はどちらも k を含まない定数です。

k が含まれるのは第 2 項の $2n \sum_{i=1}^n (i-1)j$ だけです。

③第 2 項の $\sum_{i=1}^n (i-1)j$ を求める

先の場合分けを使って、まずは $j = i + k - 1$ として全行の和を求めたうえで、ワープが起こる行だけに補正を行うと、第 2 項の $\sum_{i=1}^n (i-1)j$ は以下の 2 つのパートに分かれます。

$$\sum_{i=1}^n (i-1)j = \underbrace{\sum_{i=1}^n (i-1)(i+k-1)}_{\text{【第 1 パート】基本の進み方}} - \underbrace{n \sum_{i=n-k+2}^n (i-1)}_{\text{【第 2 パート】ワープ補正}}$$

第 2 パートが $i = n - k + 2$ から $i = n$ までの和であるのは、 $i \geq n - k + 2$ の部分で汎対角線がワープするからです。

【第 1 パート】の計算

$(i-1)(i+k-1)$ を展開すると $(i-1)i + (k-1)(i-1)$ となるので

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i-1)(i+k-1) &= \sum_{i=1}^n (i-1)i + (k-1) \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= A + (k-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

ここで $A = \sum_{i=1}^n (i-1)i$ は k を含まない定数です。また $\sum_{i=1}^n (i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ となります。

【第 2 パート】の計算

$$B = \sum_{i=n-k+2}^n (i-1)$$

とおくと、 B は $n-k+1$ から $n-1$ までの、 $k-1$ 個の連続する整数の和であるため

$$\begin{array}{rcl} B & = & (n-k+1) + (n-k+2) + (n-k+3) + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ +) \quad B & = & (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + (n-k+3) + (n-k+2) + (n-k+1) \\ \hline 2B & = & (2n-k) + (2n-k) + (2n-k) + \cdots + (2n-k) + (2n-k) + (2n-k) \end{array}$$

$2B$ は $2n-k$ が $k-1$ 個分であるため

$$B = \frac{(2n-k)(k-1)}{2}$$

よって、第 2 パートは

$$n \sum_{i=n-k+2}^n (i-1) = n \cdot \frac{(2n-k)(k-1)}{2}$$

第 1 パートと第 2 パートの差を計算

先の式（第 1 パート - 第 2 パート）を計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (i-1)j &= A + (k-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n \cdot \frac{(2n-k)(k-1)}{2} \\
&= A + \frac{n(k-1)}{2} \{(n-1) - (2n-k)\} \\
&= A - \frac{n}{2}(k-1)(n+1-k)
\end{aligned}$$

共通因数 $\frac{n}{2}(k-1)$ でくくった後、中カッコ内を $(n-1) - (2n-k) = k-n-1 = -(n+1-k)$ と整理しました。

④閉形式を求める

これらの結果を $p_2(P_k)$ の展開式に代入すると

$$\begin{aligned}
p_2(P_k) &= n^2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 2n \left\{ A - \frac{n}{2}(k-1)(n+1-k) \right\} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \underbrace{\left[n^2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 2nA + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]}_{k \text{ を含まない定数} = C_P} - n^2(k-1)(n+1-k)
\end{aligned}$$

大カッコ内は k を含まない定数で、これを C_P とします。 $p_2(P_k)$ に $k=1$ を代入すると $(k-1)(n+1-k) = 0$ となるため、 C_P は $k=1$ (主対角線 P_1) の 2 乗和 $p_2(P_1)$ そのものです。

閉形式 (主方向)

$$p_2(P_k) = C_P - n^2(k-1)(n+1-k)$$

ここで $C_P = p_2(P_1)$ は $k=1$ (主対角線 P_1) の 2 乗和に等しい定数。

C_P の値は、 $A = \sum_{i=1}^n (i-1)i$ を求めて上記の大カッコに代入して導くことができますが、 $p_2(P_1)$ が初項 1、公差 $n+1$ の等差数列における各項の 2 乗の和であると考えて

$$C_P = \sum_{m=1}^n (mn + m - n)^2 = \frac{n(2n^4 + n^3 + 3n^2 - n + 1)}{6}$$

と導くこともできます。

⑤グラフで考える

$(k-1)(n+1-k)$ という部分について、この式を y とし、 k を x に置き換えた $y = (x-1)(n+1-x)$ のグラフは **上に凸の放物線** です。 $x=1$ と $x=n+1$ で $y=0$ となり、中央に近づくほど y の値は大きくなります。したがって、 $y = -n^2(x-1)(n+1-x)$ のグラフは **下に凸の放物線** となるため、 $p_2(P_k)$ の $n=5$ におけるグラフは図 7 のようになります。

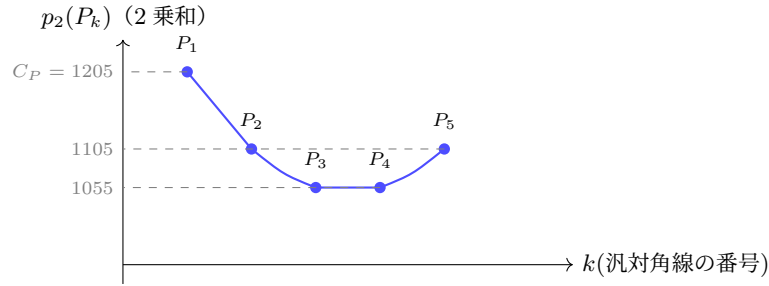


図7 $n = 5$ における $p_2(P_k)$ の値

一般に $p_2(P_k)$ のグラフは $2 \leq k \leq n$ の範囲で左右対称 (k と $n+2-k$ で同じ高さ) になるため、 $p_2(P_k)$ と $p_2(P_{n+2-k})$ は必ず等しくなります。これが対称ペアが♡♡になる数学的理由です。また P_1 は対応先の集合 $k' = n+2-k$ において $k=1$ のとき $k' = n+1$ となりますが、 P_{n+1} は存在しないため、 P_1 は2乗和の一致するペアを持ちません。

⑥副方向の検証

Q_k の列番号は $j \equiv -i+k \pmod{n}$ (i, j は n 以下の自然数) で定まります。主方向との違いは、 j における i の符号がマイナスになっている点 (逆方向に進む点) で、展開すると第2項の符号が逆転します。

閉形式 (副方向)

$$p_2(Q_k) = C_Q + n^2(k-1)(n+1-k)$$

ここで $C_Q = p_2(Q_1)$ は副方向の汎対角線 Q_1 の2乗和に等しい定数。

$n^2(k-1)(n+1-k)$ の符号について、主方向は正、副方向は負です。

C_Q の値は、初項 n 、公差 $n-1$ の等差数列における、各項の2乗の和であると考えて

$$C_Q = \sum_{m=1}^n (mn - m + 1)^2 = \frac{n(2n^4 - n^3 + 3n^2 + n + 1)}{6}$$

と導くことができます。

C_P と C_Q の差を計算すると

$$C_P - C_Q = \frac{n^2(n^2 - 1)}{3} \geq 0$$

が成り立ちます ($n=4$ では $414 - 334 = 80 = 16 \times 5$ と確認できます)。これは $p_2(P_1) - p_2(Q_1)$ 、つまり P_1 と Q_1 の2乗和の差にほかなりません。

ステップ2：閉形式が何を意味するか

$p_2(P_k)$ と $p_2(Q_k)$ の式を並べると、構造がくっきりと見えます。

$$p_2(P_k) = C_P - n^2 f(k), \quad p_2(Q_k) = C_Q + n^2 f(k)$$

ここで $f(k) = (k-1)(n+1-k)$ とおきます。 $f(k)$ は $k=1$ (および $k=n+1$) で 0 をとり、 k が $\frac{n+2}{2}$ に近づくほど値は大きくなります。この式から、次のことがいえます。

対称ペア補題

$f(x) = (x-1)(n+1-x)$ に $x = n+2-k$ を代入すると

$$f(n+2-k) = (n+1-k)(k-1) = f(k)$$

したがって、範囲 $1 \leq k \leq n$ を満たす各 k について

$$p_2(P_k) = p_2(P_{n+2-k}), \quad p_2(Q_k) = p_2(Q_{n+2-k})$$

P_k と P_{n+2-k} は 1 乗和、2 乗和がどちらも一致するため、必ず ♡♡ ペアをなす (ただし $k = n+2-k$ 、すなわち n が偶数で $k = \frac{n+2}{2}$ となる中心の汎対角線を除く)。

上記により、3 次の $\{P_2, P_3\}$ 、4 次の $\{P_2, P_4\}$ 、5 次の $\{P_3, P_4\}$ 、 $\{P_2, P_5\}$ はすべて必然的に ♡♡ ペアになります。

次に「主方向、副方向を横断する ♡♡ ペア」が存在する条件を求めます。 P_{k_1} の 2 乗和と Q_{k_2} の 2 乗和が等しい、すなわち $p_2(P_{k_1}) = p_2(Q_{k_2})$ とするとき

$$C_P - n^2 f(k_1) = C_Q + n^2 f(k_2) \iff f(k_1) + f(k_2) = \frac{n^2 - 1}{3}$$

と整理されます。 $n=5$ 、 $(k_1, k_2) = (2, 2)$ では (左辺) $= 4 + 4 = 8$ 、(右辺) $= \frac{24}{3} = 8$ で成立。 $n=3$ では (右辺) $= \frac{8}{3}$ が整数でなく、横断ペアは生まれません。

主方向、副方向を横断するペアが存在する条件

P_{k_1} と Q_{k_2} が ♡♡ ペアをなす必要十分条件は

$$(k_1 - 1)(n + 1 - k_1) + (k_2 - 1)(n + 1 - k_2) = \frac{n^2 - 1}{3}$$

が、 $1 \leq k_1 \leq n$ 、 $1 \leq k_2 \leq n$ を満たす整数解 (k_1, k_2) をもつことである。特に $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき右辺は整数にならず、横断ペアは存在しない。

注記：ここで k_1 、 k_2 は自然方阵における汎対角線番号を表すため、範囲は $1 \leq k_1 \leq n$ 、 $1 \leq k_2 \leq n$ の整数に限られます。

ステップ 3：8 種の回転移動、対称移動における操作での保存

正方形の 8 種の回転移動、対称移動の操作すべてにおいて ♡♡ 関係が保存されることを示します。

前節の変換則より、これら 8 種の操作のうちのどれを行っても P_k, Q_k は $P_k, P_{k'}, Q_k, Q_{k'}$ のいずれかへ移動させることができます ($k' \equiv n + 2 - k \pmod{n}$)。ここで対称ペア補題から $f(k') = f(k)$ となります。

したがって、2 本の汎対角線 P_a と P_b が $\heartsuit\heartsuit$ ペアをなす (2 乗和が等しい) ことは、対称ペア補題より「 $f(a) = f(b)$ 」であることと同値です。

ある操作を行うと、元のペア $\{P_a, P_b\}$ は、新たなペア $\{P_x, P_y\}$ または $\{Q_X, Q_Y\}$ に移動します。ここで重要なのは、変換のルール上「2 本とも P 系列にとどまる」または「2 本とも Q 系列に移動する」ということです。すると、移動後の 2 乗和は以下ようになります。

- P 系列にとどまった場合

$$p_2(X_a) = C_P - n^2 f(a), \quad p_2(X_b) = C_P - n^2 f(b)$$

- Q 系列に移動した場合

$$p_2(X_a) = C_Q + n^2 f(a), \quad p_2(X_b) = C_Q + n^2 f(b)$$

もともと $f(a) = f(b)$ だったので、移動先が C_P を基準とする世界 (引き算) であっても、 C_Q を基準とする世界 (足し算) であっても、計算結果は必ず同じになります。すなわち、一度結ばれた $\heartsuit\heartsuit$ ペアは、8 種のどの操作を行っても、決して引き裂かれることなく維持されるのです。

具体的に $n = 4, a = 2, b = 4, f(2) = f(4) = 3$ の場合で確認します。

表8 $n = 4$ のときの P_2, P_4 の移動先

操作	P_2 の移動先	P_4 の移動先	共通の p_2 値
r_0	P_2 (366)	P_4 (366)	$C_P - 48 = 366$
r_{90}	Q_2 (382)	Q_4 (382)	$C_Q + 48 = 382$
r_{180}	P_4 (366)	P_2 (366)	$C_P - 48 = 366$
r_{270}	Q_4 (382)	Q_2 (382)	$C_Q + 48 = 382$
s_{90}	Q_4 (382)	Q_2 (382)	$C_Q + 48 = 382$
s_0	Q_2 (382)	Q_4 (382)	$C_Q + 48 = 382$
s_{135}	P_4 (366)	P_2 (366)	$C_P - 48 = 366$
s_{45}	P_2 (366)	P_4 (366)	$C_P - 48 = 366$

※ $C_P = 414, C_Q = 334, ()$ は 2 乗和

P 系列にとどまる操作 ($r_0, r_{180}, s_{135}, s_{45}$) で使用する定数は C_P 、 Q 系列に移動する操作 ($r_{90}, r_{270}, s_{90}, s_0$) では C_Q と変わりますが、どちらの場合も $f(k) = f(n + 2 - k)$ を満たすペアには同じ定数が割り当てられるため、値の一致は保たれます。

本節で示したこと（一般の n で成立）

- 閉形式： $p_2(P_k) = C_P - n^2 f(k)$, $p_2(Q_k) = C_Q + n^2 f(k)$, $C_P - C_Q = \frac{n^2(n^2 - 1)}{3}$
- 対称ペア補題： $f(k) = f(n + 2 - k)$ より, $\{P_k, P_{n+2-k}\}$, $\{Q_k, Q_{n+2-k}\}$ は ♡♡ ペア
- 主方向と副方向を横断するペアが存在する条件： P_{k_1} と Q_{k_2} が ♡♡ ペアをなす必要十分条件
- 8 種の操作に関する不変性：正方形の 8 種の操作すべてで ♡♡ 関係は保存される

注) $f(k) = (k - 1)(n + 1 - k)$, $C_P = p_2(P_1)$, $C_Q = p_2(Q_1)$

6 おわりに：謎の先にある謎

前節で導いた「主方向と副方向を横断するペアが存在する条件」の整数方程式について、実際に条件を満たす汎対角線番号の組合せを次数 n ごとに探して列挙すると、次のような結果が得られます。

表9 次数 n と 2 乗和が一致するグループの組合せ

次数 n	2 乗和が一致する汎対角線のグループ	共通の 2 乗和
3, 4, 6, 8, 9	なし（主方向、副方向を横断するペアは存在しない）	—
5	$\{P_2, P_5, Q_2, Q_5\}$	1105
7	$\{P_2, P_7, Q_3, Q_6\}$ $\{P_3, P_6, Q_2, Q_7\}$	5873 5677
10	$\{P_2, P_{10}, Q_5, Q_7\}$ $\{P_5, P_7, Q_2, Q_{10}\}$	34585 33085
11	$\{P_2, P_{11}, Q_6, Q_7\}$ $\{P_6, P_7, Q_2, Q_{11}\}$	55561 53141

※ 各グループ内では、主方向（ P ）と副方向（ Q ）を横断して、汎対角線のマスに書かれた数の 2 乗和が完全に一致します。

n が 3 の倍数のときに横断ペアが絶対に存在しないことはすでに証明した通りです。しかし、表に見られるように $n = 5, 7, 10, 11, \dots$ と出現する解の背後に、どのような法則が隠されているのかはまだ完全には解明されていません。

残された問い

- 横断ペアが存在する次数 n の値 $5, 7, 10, 11, \dots$ には、規則性があるか？ また n の値は無限に存在するのか？

「1 から n^2 を順に並べただけ」という素朴な配列が、整数論、群論、組合せ論が交差する豊かな世界への入り口になっていることがわかりました。自然方陣をめぐる探究の旅は、まだ終わりそうにありません。

参考文献

1. 大森清美, [新版] 魔方陣の世界, 日本評論社, 東京, 2018.
2. K. Takemura, “The Magic of a 12-12-12 Split: Discovering Soaisu,” *Math Horizons*, Vol. 33, No. 3 (2026), pp. 21–23.
doi:10.1080/10724117.2025.2578498
3. K. Takemura, “The Supersymmetric Number Clock (12): A Playground for Soaisu,” *Math Horizons*, Vol. 34, No. 1 (2026), pp. 14–17.
doi:10.1080/10724117.2026.2675895
4. K. Takemura, “The beautiful soaisu partition,” *Chalkdust Magazine*, Issue 23 (2026).
<https://chalkdustmagazine.com/features/the-beautiful-soaisu-partition/>
5. K. Takemura, “Soaisu—When Two Hexagons Sing in Harmony: A Geometric Approach to the Prouhet–Tarry–Escott Problem,” *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 48 (2026).
doi:10.1007/s00283-026-10552-z
6. K. Takemura, “The Soaisu Structure of the 3×3 Magic Square — Power Sum Coincidences Born from Symmetry,” *ISQGD Recreational Mathematics Journal*, Vol. 1, No. 1 (2026).
doi:10.67239/rmj.v01.n01.a003.
<https://www.isqgd.org/journals/index.php/rmj/article/view/76>
7. K. Takemura, “算数や数学の学習教材としての相愛数,” SAME (公益財団法人日本数学検定協会), 研究ファイル, 2026 年 4 月 24 日.
<https://same.su-gaku.net/souaisu>
8. K. Takemura, “相愛数の背後にひそむ円—複素平面を学ぶ高校生のために,” SAME (公益財団法人日本数学検定協会), 研究ファイル, 2026 年 5 月 28 日.
https://same.su-gaku.net/souaisu_fukusosu
9. K. Takemura, “自然数の美しい対称構造—レクリエーション数学としての相愛数,” SAME (公益財団法人日本数学検定協会), 研究ファイル, 2026 年 6 月 24 日.
https://same.su-gaku.net/souaisu_natural_number
10. K. Takemura, “自然方陣の中に眠る魔方陣の対称性—探究学習教材としての魔方陣,” SAME (公益財団法人日本数学検定協会), 研究ファイル, 2026 年 7 月 16 日.
<https://same.su-gaku.net/ms-symmetry>