２次行列の累乗について

学習数学研究所　特別顧問
一松　信

０．はじめに

２次行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の累乗 A^n の計算は，数学検定の１級（ときに準１級）によく出題されている。それは標準的な手法によって対角化を（それが不可能ならばジョルダンの標準形に）して容易に計算できる。その意味で典型的な課題であり，何次でも同様である。

しかし２次に限れば，以下のようにスペクトル分解の応用による「ずるい」計算法がある。このような方法は，線形代数学の「王道」とはいえない。将来高校数学に行列が復活しても，標準課程に取り入れるべきではないと思う。

しかし出題者の立場から見ると，こういった解法もあることを考慮に入れて，慎重に出題することが望ましい。そのような注意を喚起する意味で，敢えて本稿を執筆した次第である。

以下行列の成分は任意の体の要素でもよいが，実数として述べる。また一般の n 次正方行列についても同様だが，解説を２次行列に限定する。固有値を含む線形代数学の基礎知識は既知とする。

１．行列の固有値に関して（復習）

２次の正方行列 A は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像の表現である。それによって自分自身の（０でない）定数倍に写される（０でない）ベクトル $\boldsymbol{v}$：$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ が<u>固有ベクトル</u>であり，定数λは<u>固有値</u>とよばれる。

これに対して $\boldsymbol{u}A=\lambda\boldsymbol{u}$（$\boldsymbol{u}\neq 0$）を満たす行ベクトル（横ベクトル）$\boldsymbol{u}$ を<u>行固有ベクトル</u>とよぶ。それは A の転置行列 A^{T} の固有ベクトルを転置したものである。

固有値λは固有方程式　$\det(A-\lambda I)=0$　の解として計算できる（det は行列式，I は単位行列)。今の場合 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して，固有方程式は

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \tag{1}$$

と表される。以下しばらく(1)が相異なる２個の解 λ_1，λ_2 をもつ（判別式≠０）と仮定する。λ_i（$i=1$，２）に対する（列）固有ベクトルと行固有ベクトル（の１つ）をそれぞれ $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{u}_i$ とおく。$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$；$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ はそれぞれ一次独立で，それぞれが $\boldsymbol{R}^2$ の基底をなす。

<u>補助定理１</u>　$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$，$\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_1=0$，$s_i=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\neq 0$

<u>証明</u>　$\boldsymbol{u}_1\cdot A\cdot\boldsymbol{v}_2=\lambda_1\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$　であり，$\lambda_1\neq\lambda_2$ から $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$；$\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_1=0$ も同様。他方 $\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{u}_2$ と一次独立なので，$s_2=\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_2\neq 0$；$s_1=\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1\neq 0$ も同様である。□

<u>注意</u>　A が対称行列なら $\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{v}_i$ の転置行列としてよいが，そうでない場合には区別を要

する。なお上記の積は $\boldsymbol{u}_i$ を１行２列，$\boldsymbol{v}_i$ を２行１列の行列とみなしたときの行列の積である。

２．スペクトル分解

前節の記号をそのまま続けて使う。

<u>補助定理２</u>

$$P_i=\frac{1}{s_i}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{u}_i \quad \text{（２行２列の行列）} \tag{2}$$

とおくと，行列 P_1，P_2 は次の性質をもつ：

$$P_i^2=P_i,\ P_1\cdot P_2=P_2\cdot P_1=O \quad \text{（零行列）} \tag{3}$$

$$P_1+P_2=I,\ \lambda_1P_1+\lambda_2P_2=A \tag{4}$$

証明　(3)は単なる計算でできる。行列の積に結合法則を適用する。

$$P_i^2=\frac{1}{s_i^2}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{u}_i=\frac{s_i}{s_i^2}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{u}_i=P_i \quad (i=1,\ 2)$$

$$P_1\cdot P_2=\frac{1}{s_1s_2}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=O,\ P_2\cdot P_1 \text{ も同様。}$$

(4)は次のように考える。任意の（縦）ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，一意的に $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2$ と表される。これに(4)の左辺の行列を，線形変換として適用する。i，$j=1$，２として

$$P_i\boldsymbol{v}_j=\frac{1}{s_i}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{v}_j=\frac{s_i}{s_i}\boldsymbol{v}_i\cdot\delta_{ij} \quad (j=i \text{ なら } \boldsymbol{v}_i,\ j\neq i \text{ なら } 0)$$

だから，次の等式が成立する。

$$(P_1+P_2)\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{x}=I\boldsymbol{x}$$

$$(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)\boldsymbol{x}=\lambda_1\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\alpha_2\boldsymbol{v}_2=A\alpha_1\boldsymbol{v}_1+A\alpha_2\boldsymbol{v}_2=A\boldsymbol{x}$$

これらがすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成立する。これは両辺の写像を表す行列どうしが相等しい（式(4)）ことを意味する。□

<u>定義</u>　上述の性質(3)，(4)を満たす２次行列 P_1，P_2 をもとの行列 A の<u>スペクトル分解</u>という。それは式(4)を P_1，P_2 の連立一次方程式とみなせば一意的である。□

実用上には(4)を解いて，次のように直接に計算するほうが早い。

$$P_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2I),\ P_2=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1I-A) \tag{5}$$

３．Aの累乗の式

<u>定理３</u>　スペクトル分解 P_1，P_2 が既知とする。$\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき，A の<u>累乗</u>は次の式で与えられる。

$$A^n=\lambda_1^nP_1+\lambda_2^nP_2 \tag{6}$$

系　もし$\lambda_1 \neq 0$，$\lambda_2 \neq 0$ならば，Aの逆行列A^{-1}は(6)で$n=-1$とおいた式$\dfrac{1}{\lambda_1}P_1+\dfrac{1}{\lambda_2}P_2$で与えられる。

証明　$n=0$，１のときは補助定理２による（$A^0=I$とみなす)。次に$n>0$のとき正しいとすれば

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=(\lambda_1{}^nP_1+\lambda_2{}^nP_2)(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)$$
$$=\lambda_1{}^{n+1}P_1+\lambda_2{}^{n+1}P_2+(\lambda_1{}^n\lambda_2\cdot P_1\cdot P_2+\lambda_1\lambda_2{}^nP_2\cdot P_1) \tag{7}$$

だが，$P_1\cdot P_2=P_2\cdot P_1=O$（零行列）で(7)の末尾の（　）内は$O$に等しく，(7)は(6)の$n+1$の場合になる。すなわち$n$に関する数学的帰納法で正しい。

系は同様に，$n=-1$とした式に$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2$を掛ければ$P_1+P_2=I$になるので，それが逆行列である。▯

以上によってAの固有値λ_1，λ_2（但し$\lambda_1\neq\lambda_2$）さえ計算できれば，Aの累乗もさらに逆行列（$\lambda_1\lambda_2\neq 0$のとき）も，対角化行列などを計算せずに，直接に計算できる。

例１　$A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}$　固有方程式は$\lambda^2-10\lambda+16=0$であり，固有値は$\lambda_1=8$，$\lambda_2=2$；式(5)から

$$P_1=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix},\quad P_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -8 & 2\end{bmatrix}$$

であり，累乗は次のようになる。

$$A^n=\frac{8^n}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix}+\frac{2^n}{6}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -8 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2^{3n+1}+2^{n+2} & 8^n-2^n\\ 8^{n+1}-2^{n+3} & 2^{3n+2}+2^{n+1}\end{bmatrix}$$

必要ならばAを対角化して検算してみるとよい。

４．固有値が重解の場合

固有方程式(1)が重複解λをもつ場合には，上述の方法は適用できないが，伝統的な標準手法で累乗A^nが計算できる。

もしも重複固有値λに属する固有ベクトル空間が２次元ならば，Aは（λ，λ）を対角線成分とする対角線行列に変換できる。しかしそれは初めから$A=\lambda I$の場合であって，計算は容易である。

それ以外の場合にはAは対角化できない。しかし（いろいろな方法で）適当な可逆な変換行列Mにより

$$B=M^{-1}AM=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda I+J,\quad J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

とジョルダンの標準形に変換できる。$J^2=O$であり

$$A^n=MB^nM^{-1};\ B^n=(\lambda I+J)^n=\lambda^nI+n\lambda^{n-1}J$$

の形でAの累乗が計算できる。具体的には次の通りになる。

$$A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(MJM^{-1}) \tag{8}$$

$M=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$とおくと，$MJM^{-1}=\dfrac{p}{ps-qr}\begin{bmatrix} -r & p \\ -p & r \end{bmatrix}$

結局変換行列 M を求めることができれば，式(8)により A^n が計算できる。

例２　$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　固有方程式は$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$で, 固有値は１（重解）だが，固有ベクトル空間は１次元である。その一例は $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

$(A-\lambda I)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ である一般固有ベクトル $\boldsymbol{w}$ の一例は $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。$M=[\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$M^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$により，$B=M^{-1}AM=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$となる。$B^n=I+nJ=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$であり，

$A^n=MB^nM^{-1}=\begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix}$を得る。 (9)

ジョルダンの標準形に変換する行列 M は他にもあるが，A^n の結果は同一である。結果の式(9)がわかれば，それが正しいことは，n に関する数学的帰納法で確かめられる。

５．むすび

以上の議論はある程度一般の正方行列に拡張できるが、特に２次の場合の簡便法に重点を置いた。初めに述べた通り，こういった「安直な便法」が広まるのは必ずしも望ましいとは思われない。しかし出題者側は十分心得ていてほしい知識として紹介した次第である。