

自然方陣の中に眠る魔方陣的対称性

——探究学習教材としての魔方陣——

竹村 謙一

Independent Researcher (Tokyo, Japan)

概要

1 から 16 までの自然数を順番に並べただけの「4 次自然方陣」。一見、何の変哲もないこの数の格子に、魔方陣と驚くほど近しい対称構造が潜んでいるとしたら——。本稿では、汎対角線・回転対称性・左右反転という幾何学的な視点から自然方陣と魔方陣の定和構造を徹底的に対比します。その過程で浮かび上がる 4-4 相愛数 ♡♡♡ は、自然方陣がいかに豊かな代数的構造を秘めているかをあざやかに示すものです。後半では、小学校から高校・探究学習まで活用できる授業アイデアを具体的に提案します。

キーワード：自然方陣，魔方陣，相愛数，対称性

この記事について：

本稿は「研究ファイル」に掲載された**相愛数シリーズ**の関連記事として、魔方陣と自然方陣の対称性を探究学習の文脈から論じるものです。

必要な数学レベル：

- **本文を楽しむだけなら：**たし算・かけ算・「順番に並べる」という算数の感覚があれば、小学校高学年から読み進められます。図と計算結果を追うだけでも、自然方陣の不思議さは十分に体験できます。
- **証明まで理解するなら：**中学数学で学習する文字式の計算を扱えると、汎対角線の定和性を自分で確かめることができます。
- **発展的な内容（脚注・コラム）：**高校数学の等差数列、置換の概念、および行列の積（大学数学入門レベル）が登場しますが、本筋を理解する上では必須ではありません。

相愛数シリーズの他の記事（第 1 弾～第 3 弾）とは独立して読めますが、あわせて通読するとより楽しめます。

はじめに

本稿の主役は、この4次自然方陣となります。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図1 4次自然方陣

そうです。1から16までの整数を、左から右へ、上から下へ、順番に並べていく。ただ、それだけのことで、このような何のひねりもない配列に、考察の対象とするような価値があるとでもいうのでしょうか？

定義1(自然方陣). 1から n^2 までの連続する自然数を、行優先（左から右、上から下）で $n \times n$ のマスに順番に配置した配列を、 n 次自然方陣という。

一方で、数の愛好家たちの間で古来より、好奇的となってきた数の配列に「魔方陣」というものがあります。魔方陣は、工夫を凝らして数を配置することではじめて得られる、いわば数で細工された対称性の結晶とでもいうべきものです。

D_1 の和 = 34	T_1 の和 = 34	T_2 の和 = 34	T_3 の和 = 34	T_4 の和 = 34	D_2 の和 = 34
	16	3	2	13	Y_1 の和 = 34
	5	10	11	8	Y_2 の和 = 34
	9	6	7	12	Y_3 の和 = 34
	4	15	14	1	Y_4 の和 = 34

図2 4次魔方陣の一例

定義2(魔方陣). 1から n^2 までの整数を $n \times n$ のマスに過不足なく配置したとき、すべての行、すべての列、および2本の対角線に書かれた数の和が等しくなるような配列を n 次魔方陣という。このとき共通の和(図2では34)を**定和**(magic constant)という。

n 次魔方陣の定和は $\frac{n(n^2+1)}{2}$ となります。これは、すべてのマスに書かれた数の和が $1+2+3+\cdots+n^2 = \frac{n^2}{2}(n^2+1)$ で表されるため、これを n で割ることで 1 列分の和が得られます。 $n=4$ のとき、 $1+2+\cdots+16 = 136$ であり、定和は $\frac{136}{4} = 34$ です。

さあ、これで準備がととのいました。この記事を読み終えるころには、ただ「順番に並べただけ」の自然方陣の中に、魔方陣に匹敵するほど緻密で、豊かな構造が潜んでいたことにきっと驚かれるはずです。

汎対角線とトーラス的な視点

さて、方陣の世界には、「汎対角線」(broken diagonal) という重要な概念があります。

定義 3 (汎対角線). $n \times n$ の方陣において、対角線と同じ傾きを持ちながら、方陣の端を超えた場合に反対側から折り返して続く「循環的な斜線」を汎対角線という。 $n \times n$ の方陣には主対角線方向と副対角線方向それぞれに n 本ずつ存在する。

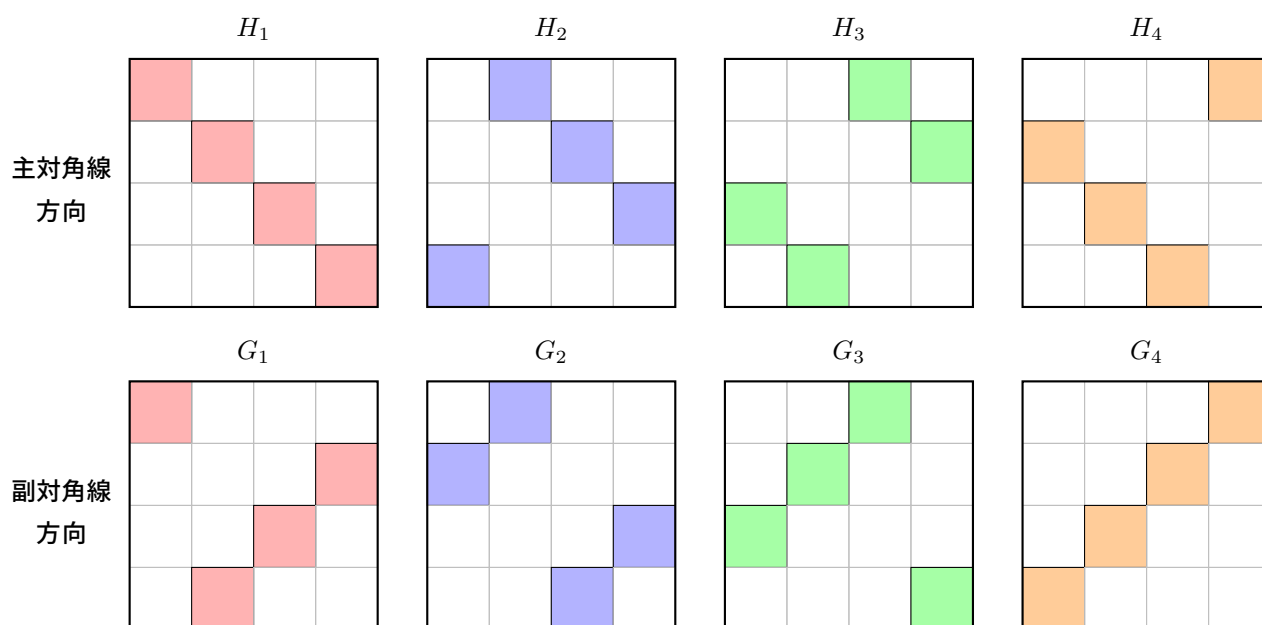


図3 汎対角線の分類

図3では上段 ($H_1 \sim H_4$) は主対角線方向、下段 ($G_1 \sim G_4$) は副対角線方向。色付きのマスが同じ汎対角線に属する4つのセルを示しています。

では、実際に、4次自然方陣にこれら8本の汎対角線を適用してみることにしましょう。わたしたちが知りたいのは、それぞれのラインをなす4数の総和です。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

■ H_1 の和: $1 + 6 + 11 + 16 = 34$

■ H_2 の和: $2 + 7 + 12 + 13 = 34$

■ H_3 の和: $3 + 8 + 9 + 14 = 34$

■ H_4 の和: $4 + 5 + 10 + 15 = 34$

図4 4次自然方陣における主対角線方向の汎対角線 $H_1 \sim H_4$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

■ G_1 の和: $1 + 8 + 11 + 14 = 34$

■ G_2 の和: $2 + 5 + 12 + 15 = 34$

■ G_3 の和: $3 + 6 + 9 + 16 = 34$

■ G_4 の和: $4 + 7 + 10 + 13 = 34$

図5 4次自然方陣における副対角線方向の汎対角線 $G_1 \sim G_4$

わかりますか？驚くべきことに、8本のラインすべてにおいて4数の総和が魔方陣の定和である34と等しくなっています。自然方陣にもこのような目覚ましい定和構造が巧みに組み込まれていたとは実に意外です。

魔方陣と自然方陣：定和構造の対比

ここであらためて、4次魔方陣と4次自然方陣のそれぞれが持つ「和が34になるライン」を整理してみましょう。

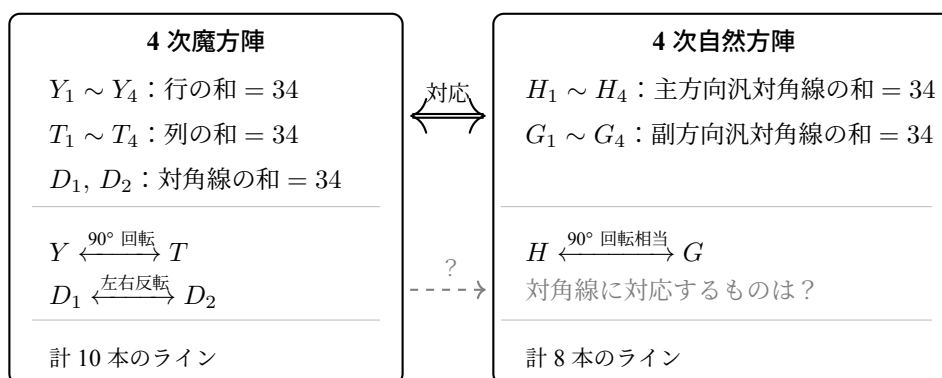


図6 4次魔方陣と4次自然方陣における「和が34になるライン族」の対比

こうして見ると、両者の定和構造は思いのほか近いのではないのでしょうか？魔方陣の「行 (Y)、列 (T)」と自然方陣の「主方向汎対角線 (H)、副方向汎対角線 (G)」は似ていて、魔方陣と自然方陣のどちらも 90° 回転変換関係にあります。以降、回転の中心は自然方陣の中央とします。

もし、魔方陣の「主対角線、副対角線 (D_1, D_2)」に対応するものを、自然方陣の中のうまく見出すことができれば……

その答えを探しにいきましょう。

魔方陣の対角線に「対応するもの」を探す

魔方陣において、対角線 D_1, D_2 は行、列とは異なる特別な存在です。行や列はそれぞれ4本とも「 90° 回転」で $T_1 \sim T_4 \longleftrightarrow Y_1 \sim Y_4$ のどれかに移りますが、対角線はたった2本しかなく、「左右反転（あるいは上下反転）」で $D_1 \longleftrightarrow D_2$ と入れ替わります。

では、4次自然方陣の中に、対角線 D_1, D_2 と同じような役割を果たす2組の4数の集合 S_1, S_2 を見つけられるでしょうか。魔方陣の対角線が満たす性質を手がかりに、次の3条件を設定します。

- (1) 各行・各列から1つずつ選ぶ
- (2) S_1, S_2 とともに4数の総和が34
- (3) S_1 の配置を左右反転すると S_2 の配置になる

4次自然方陣の中でこの3条件を同時に満たすペアをすべて探索すると、ちょうど12組が見つかります。図7において青を S_1 、ピンクを S_2 とします。

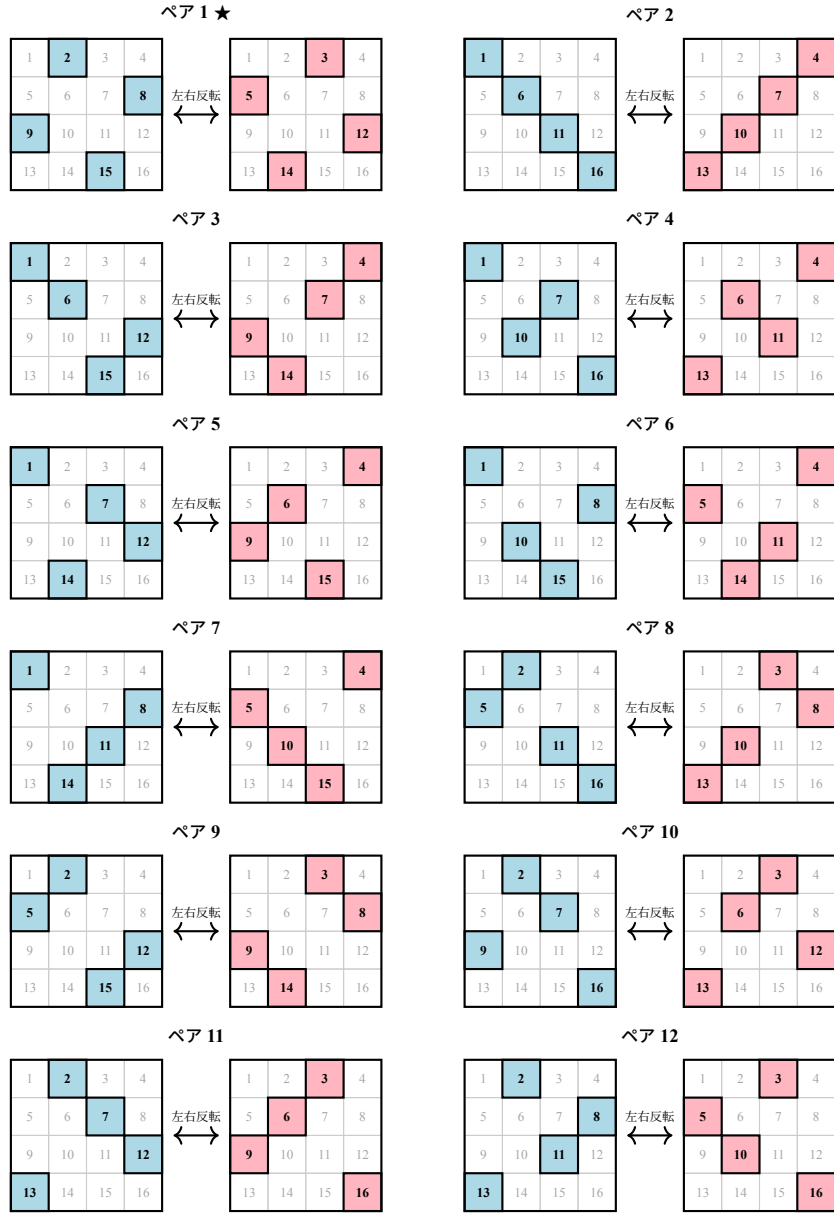


図7 条件 (1)(2)(3) を同時に満たす 12 組のペア

これら候補となる 12 組のペアをさらに吟味してみましょう。

まずペア 2 は除外する必要があります。 $S_1 = \{1, 6, 11, 16\}$ の配置は前節で登場した主方向汎対角線 H_1 にほかなりません。同様に $S_2 = \{4, 7, 10, 13\}$ の配置は G_4 そのものです。すなわちペア 2 は、「対角線に対応する新しい構造」ではなく、すでに発見済みの汎対角線の再登場にすぎません。

私たちが探しているのは、汎対角線族 ($H_1 \sim H_4$, $G_1 \sim G_4$) とは独立した第三の構造です。魔方陣において対角線 D_1 、 D_2 が行、列とは別の存在であるように、自然方阵においても「汎対角線とは異なる新たな構造」を見出すことがこの探索の目的でした。ペア 2 はその条件を満たさないため、以降の考察から除外します。

では、残る 11 組の中で、魔方陣の D_1 、 D_2 に最も近い対称性を持つものはどれでしょうか？

魔方陣において D_1 、 D_2 は、左右反転で互いに入れ替わるだけでなく、方陣全体の対称変換群^{*1}のもとでペアとして閉じた振る舞いをします。すなわち、8 つの変換のどれを施しても、 $\{D_1, D_2\}$ というペアの集合が $\{D_1, D_2\}$ のままにとどまります。

同じ条件を自然方陣の残りの 11 組に課してみます。具体的には、90 度回転によって $\{S_1, S_2\}$ というペアが保たれるか、すなわち

- $S_1 \xrightarrow{90^\circ} S_2, S_2 \xrightarrow{90^\circ} S_1$ (互いに入れ替わる)
- $S_1 \xrightarrow{90^\circ} S_1, S_2 \xrightarrow{90^\circ} S_2$ (それぞれ自分自身に戻る)

のどちらかが成立するかを確かめます。

確認してみると、この条件を満たすのはペア 1 だけです。図 8 をご覧ください。

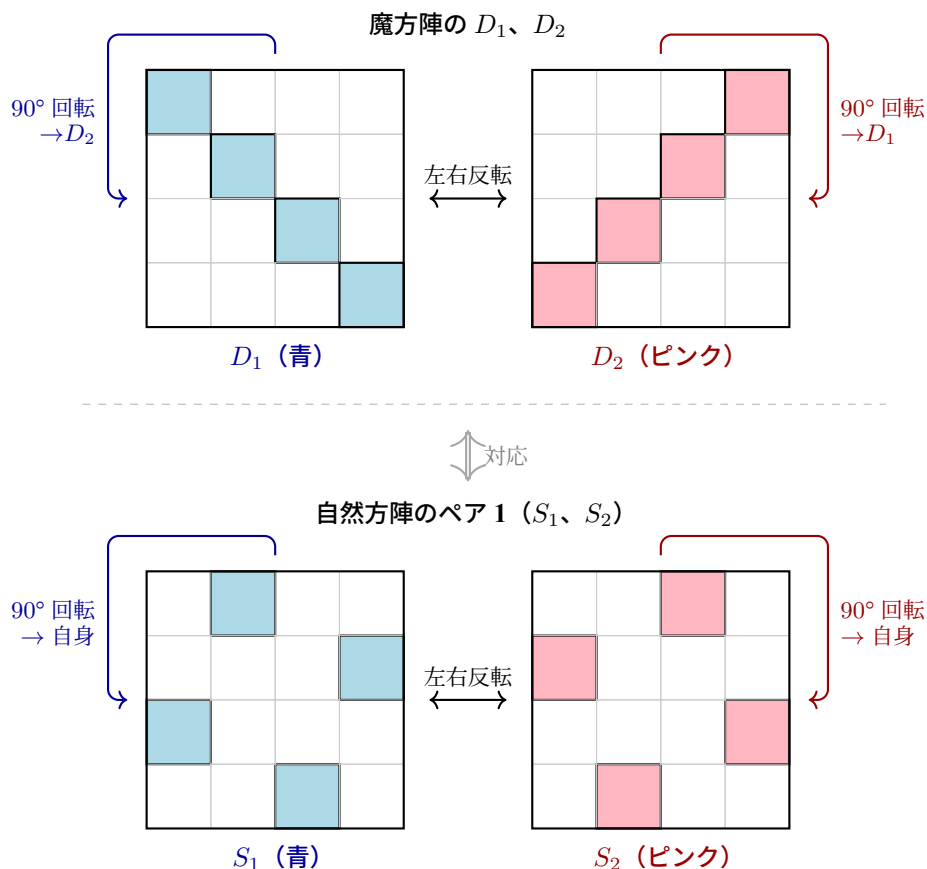


図8 魔方陣の D_1 、 D_2 (上) と自然方陣のペア 1 の S_1 、 S_2 (下) の配置パターン

^{*1} 正方形を自分自身へ写す合同変換全体のなす群で、 0° 、 90° 、 180° 、 270° の回転 4 種と、左右、上下、2 本の対角線まわりの反転 4 種、合計 8 つの変換からなる。この群を正方形の対称群 (あるいは 4 次二面体群) と呼ぶ。

他の10組（ペア1と2を除いた残り）は、左右反転関係こそ満たすものの、90度回転によって $\{S_1, S_2\}$ というペアの関係は保たれません。よって、この回転不変性は、ペア1が12組の中で最も「魔方陣の対角線らしい」対称性を備えていることを意味しています。

4次自然方陣の4-4 相愛数♡♡♡ ポジション

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$$\blacksquare S_1 = \{2, 8, 9, 15\}$$

$$\blacksquare S_2 = \{3, 5, 12, 14\}$$

図9 4次自然方陣における S_1 （青）と S_2 （ピンク）のポジション

4次自然方陣において、このペア1のパターンは重要な役割を担っていることがわかっています。その最たるものとして相愛数というものを紹介します。そう、この S_1 と S_2 には、対称性の高さだけにとどまらない、さらに驚くべき代数的性質が潜んでいるのです。 S_1 と S_2 の各4数の冪乗和を計算すると、1乗和だけでなく、なんと2乗和、3乗和まで完全に一致するのです。

表1 S_1 と S_2 における各次累乗和の比較

集合	1 乗和 ($\sum a$)	2 乗和 ($\sum a^2$)	3 乗和 ($\sum a^3$)	4 乗和 ($\sum a^4$)
$S_1 = \{2, 8, 9, 15\}$	34	374	4,624	61,298
$S_2 = \{3, 5, 12, 14\}$	34	374	4,624	59,858
判定	一致 (✓)	一致 (✓)	一致 (✓)	不一致 (×)

1乗和から3乗和まで完全に一致し、4乗和で初めて両者は不一致となります。このように、ある累乗和まで一致するような性質を持つ数の組を「相愛数 (Soaisu)」と呼ぶことにします。

定義：相愛数 (Soaisu)

m 個の集合 $A_1, A_2, \dots, A_m$ (各要素の数は n) に対し、 $l = 1, 2, \dots, k$ のすべてにおいて

$$\sum_{a \in A_1} a^l = \sum_{a \in A_2} a^l = \dots = \sum_{a \in A_m} a^l$$

が成立するとき、これらを**強度 k の $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_m$ 相愛数**と呼ぶ。強度は♡の個数で表す。

相愛数の詳細、幾何学的な背景については、「[算数や数学の学習教材としての相愛数](#)」および「[相愛数の背後にひそむ円](#)」、「[自然数の美しい対称構造](#)」をご参照ください。

S_1 と S_2 は要素の数がともに 4 かつ強度 3 の力で結ばれあっているので、上記の記法を用いて **4-4 相愛数** ♡♡♡ と表すことができます。

魔方陣と自然方陣とは兄弟関係!?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図10 4次自然方陣

わたしたちはこの何の変哲もない自然方陣というものについて、新たな目で見つめ直さないといけないのかもしれませんが、**相愛数**というメガネを通して見ると、この数の格子には、見かけのシンプルさとはうらはらに、とてつもなく奥深い構造が秘められていることがわかってきます。

さて、今回、取り上げた以外にも、4次魔方陣は回転や反転によって互いに移り合うものを「同じ」と見なすと、**880 種**存在することが知られています。ここで「回転や反転」とは、方陣を 90 度、180 度、270 度回転させたり、左右、上下に鏡映反転させたりする 8 通りの操作のことです。たとえば、ある魔方陣を 90 度回転させても魔方陣の性質は保たれるため、本質的に同じ構造を持つとみなします。この 8 通りの操作がなす対称性の枠組みを**二面体群**と呼びますが、群論の知識がなくても「8 通りの回転・反転で他方に一致するものを同一視した」と理解しておけば十分です。その中には、次のような魔方陣があります。

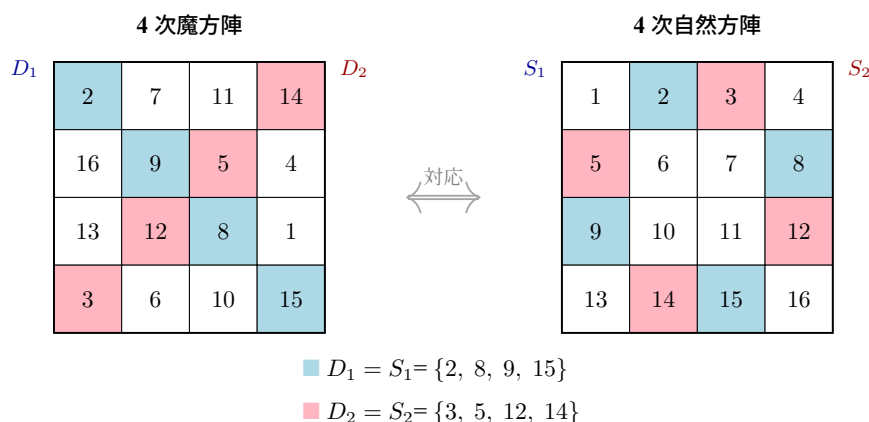


図11 4 次魔方陣（左）と 4 次自然方陣（右）の対応

興味深いことに、この魔方陣の主対角線 D_1 を構成する 4 数は $\{2, 8, 9, 15\}$ であり、自然方陣の S_1 に一致します。副対角線 D_2 を構成する 4 数は $\{3, 5, 12, 14\}$ であり、 S_2 に一致します。

まるで**双対**の関係にあるかのような二つの方陣を比べることによって、わたしたちは相愛数についてさらに多くのことを知る手がかりを得ることができるでしょう。

一口コラム：ウルトラ魔方陣（発展的内容）

上述の魔方陣には、じつは驚くべき代数的性質が隠されています。魔方陣を 4×4 の正方行列とみなし、この行列を M とすると M^3 は

$$M^3 = \begin{pmatrix} 9826 & 9826 & 9826 & 9826 \\ 9826 & 9826 & 9826 & 9826 \\ 9826 & 9826 & 9826 & 9826 \\ 9826 & 9826 & 9826 & 9826 \end{pmatrix}$$

となり、すべての成分が同じ値 9826 に揃った行列になります。この 9826 は魔方陣の定和 34 を用いて $34^3 \div 4 = 9826$ と表せます。

なお、2 乗の段階ではまだすべての成分が等しくなりません。3 乗において初めてすべての成分が等しくなるとき、その魔方陣を**ウルトラ指数 3 のウルトラ魔方陣**と定義します。

注意：行列の積はふつう中学では扱いません。生徒たちには、この魔方陣は行列の積と不思議なくらい相性がよいと、軽くふれる程度でよいでしょう。

おわりに：探究学習の教材として

魔方陣は古来より世界中の数学愛好家たちを魅了してきた存在ですが、算数・数学の教科書にほとんど登場しません。自然方陣にいたっては、「1 から順に並べただけ」という素朴さゆえに、考察の対象として取り上げ

られることはさらにまれでしょう。

しかし本稿を読み終えた今、それがいかにもったいないことであるかを感じていただけたのではないでしょう
うか。

自然方陣と魔方陣は、**数の性質・対称性・代数構造**という現代数学の核心的な概念を、紙と鉛筆（あるいは
電卓）だけで「肌で感じる」ことのできる、稀有な教材です。しかも扱う数は 1 から 16 という、小学生にも親
しみのある数です。道具のシンプルさと内容の深さが、これほど両立している題材は多くありません。

授業での活用アイデア

以下に、授業への導入アイデアをいくつか提案させていただきます。いずれも、教師が答えを一方的に与え
るのではなく、**生徒自身が自発的に発見**することを主眼に置いています。

ステップ 1：自然方陣を提示

まず 4 次自然方陣だけを黒板に書き、こう問いかけます。

「この配列の、どこが面白いと思いますか？」

答えを急がず、時間をとって生徒に考えてもらいましょう。今回、取り上げた以外にも自然方陣に関する思
いもかけない性質が明らかになるかもしれません。「ただ順番に並んでいるだけ」に見えるこの配列が、じつ
は驚くべき構造を秘めていると知ったときの感動は、自ら考察した後でなければ、決して生まれません。

ステップ 2：汎対角線の和を計算

$H_1 \sim H_4$ 、 $G_1 \sim G_4$ の各ラインの和を実際に計算してもらいましょう。すべてが魔方陣の定和 34 になるこ
とを自分の手で確かめた生徒は、思わず「えっ、なんで？」という声をあげるはずです。この「なぜ？」から始
まる問いを起点にして、生徒たちは各人の数学レベルや知識に応じてさまざまなアプローチをこころみ、また
自分たちのアイデアを持ちよることによって思わぬ新発見をするかもしれません。もしかしたら、生徒の中
には 4 次のサイズばかりでなく、3 次や 5 次の自然方陣では何が起こっているかを調べてみようと言い出すか
もしれません。自然方陣はそんな生徒たちの好奇心に応えるだけの豊かな構造を内包しています。そこから得ら
れる副産物は、公式を覚えるだけでは味わえない、「**構造の発見**」という純粋で知的な喜びを与えてくれるは
ずです。

ステップ 3：魔方陣の対角線に対応するものの探究

魔方陣の D_1 、 D_2 を紹介した上で、「自然方陣の中に、これと同じような役割を果たす 4 数の組はあるか？」
と問いかけます。条件の設定（各行、各列から 1 つずつ、和が 34、左右反転で移り合う）を生徒と一緒に議論
しながら絞り込んでいく過程は、**数学的モデリング**の好例となります。

ステップ 4：12 組のパターンの分類

見つかった 12 組のペアを生徒に提示し、「これらをグループ分けするとしたら、どのような基準で分けますか？」と問いかけましょう。回転・反転に対する振る舞いに着目する生徒、数値の大小関係に注目する生徒など、様々なアプローチが生まれるはずです。正解は一つではありません。**分類の基準を自分で設定する**という行為そのものが、数学的思考の訓練になります。

なお、「各行、各列から 1 つずつ選ぶ」という条件 (1) を満たす 4 数の集合は、じつは全部で $4! = 24$ 個しかありません。そして驚くべきことに、**条件 (1) を満たす集合はすべて自動的に条件 (2) (和が 34) ^{*2}も満たします**。条件 (3) (左右反転でペアをなす) を考慮すると、24 個は互いに対応し合うちょうど 12 組のペアに完全に分かれます。この 12 組は、偶然ではなく必然なのです。

ステップ 5：相愛数構造をさらに探究

電卓やプログラムを使って、汎対角線の各ラインについて 2 乗和、3 乗和が一致するものがないかを調べます。「1 乗だけでなく、2 乗でも一致するラインはあるか?」「4 次自然方陣の中に隠れている 4-4 相愛数 ♡♡ や 4-4 相愛数 ♡♡♡ をすべて見つけよ」といった課題は、中学生にはプログラミングの練習として、高校生（数学部など発展的な生徒）には整数論や組合せ論への入口として機能します。

この教材が持つ力

上に挙げたアイデアはほんの一例にすぎません。先生方のアレンジ次第で、授業はいくつものバリエーションで展開できます。

- ・ 小学校、中学校：計算の不思議を体験する「驚きの発見」として
- ・ 高校：対称性、群、多項式、複素数への橋渡しとして
- ・ 探究学習、数学部活動：未解決問題へと続く「研究の種」として

「ただ順番に並べただけ」の自然方陣が、
あの魔方陣と非常に仲のよい相方だった……
この事実を、ぜひ生徒たちと一緒に「再体験」してみてください。

^{*2} 4 次自然方陣において、上から i 行目、左から j 列目のマスの値は $4i + j - 4$ ($i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$) と表せる。各行、各列から 1 つずつ選ぶ操作は置換 $\sigma \in S_4$ を用いて $S_\sigma = \{4i + \sigma(i) - 4 \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ と書ける。その和は $\sum_{i=1}^4 (4i + \sigma(i) - 4) = 4(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4) - 4 \cdot 4 = 34$ となり、 σ の選び方によらず常に 34 になる。さらに左右反転は置換を $\sigma(i) \mapsto 5 - \sigma(i)$ に移す固定点なしの対合であるため、24 個の置換はちょうど $\frac{24}{2} = 12$ 組のペアに完全分解される。

参考文献

Kenichi Takemura. “The Magic of a 12-12-12 Split: Discovering Soaisu.” *Math Horizons*, pp. 21–23, 2026. DOI: 10.1080/10724117.2025.2578498.

大森清美. 『[新版] 魔方陣の世界』. 日本評論社, 2018. ISBN: 978-4-535-78885-5.