

数学は、世界・社会を構造的・階層的にみるための言語

～数学の学びは世界を新しくする～

小学生では「算数」、中学生ともなると「数学」という教科として授業が実施される中、我々はいつからか知らず知らずのうちに「解法暗記」「受験テクニック」「受験で高得点をとるための技術」に偏重して対応することが多くなるためか、数学そのものの魅力や考えることの面白さなどを経験せずして生きている部分があるような気がします。このように考えてしまうと「数学」だけでなく、他の教科も同じようなスタンスで物事を考えてしまうことになり、勉強することの意義が薄れていくことにもなりかねません。

いま世の中を見渡してみると、社会基盤となりつつある AI（人工知能）は、巨大な数学モデルを社会にリリースしている状態といっても過言ではなく、ChatGPT や Gemini を使って生活している人も多いのではないのでしょうか。人類がこれまでに生み出した科学技術は何よりも「数学」が根底にあることはいうまでもなく、また、世界や社会の動きを大きく変動させているものも「数学」であります。

ここでは、AI を事例として、数学がどのように社会実装し貢献しているのかを紐解きながら、普段の学習や勉強が、世界と社会とどのように繋がりをもっているのかを述べたいと思います。きっとそれらを把握するだけでも、学ぶことの意義が深まるのではないかと思います。

高校数学では、数学をⅠ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cに分け

数学Ⅰ：数と式（因数分解）、集合と命題、図形と計量、2次関数、データの分析

数学A：場合の数と確率、図形の性質、数学と人間の活動

数学Ⅱ：いろいろな式、図形と方程式、三角関数、指数・対数関数、

微分と積分の考え

数学B：数列、統計的な推測、数学と社会生活

数学Ⅲ：関数、極限、微分法、積分法

数学C：ベクトル、平面上の曲線と複素数平面、数学的な表現の工夫（行列）

のように章（分野）に細分化して習得することが標準的です。

特に、AI（人工知能）では、上記の分野でいう

- ① ベクトル / 行列 / 因数分解
- ② 微分法 / 2次関数
- ③ 場合の数と確率 / 指数・対数関数
- ④ 三角関数 / 数列

を同時に連動させているといっても過言ではありません。つまりは、高校数学で習得する各分野がそのまま結実して AI の仕組み（システム）を構築させたと言い換えることもできます。

これらが大学になると

- ① 線形代数（ベクトル，行列）
- ② 微分・積分
- ③ 確率・統計（ベイズ統計，正規分布，最尤推定）
- ④ 最適化（勾配法，ラグランジュ未定乗数法，凸最適化）
- ⑤ 離散数学（グラフ理論，組合せ，論理，計算理論）

といった専門的な内容に変化し，より深い学びが実現されるということになります。

さて，高校数学における上記の①～④は AI を理解する上でも，とても重要な分野であり，それらが教科書とは異なる観点で AI にどのように組み込まれているのかを少し述べておきたいと思います。また，高校数学で習得する各分野の**本質的な学び**を簡易にまとめると次のようになり，**現実世界での実用例**也多岐に渡りますが，その一部（代表的）を記しておきます。

諸分野	本質的な学び	現実世界での実用
ベクトル	位置, 情報, 方向, 関係性	AI, 検索, 画像認識
微分	変化をみる	最適化, 機械学習
積分	累積	電気, ロケット, 機械, 自動車 建築, 人口, GDP, エネルギー 感染拡大, スマホ通信, Wi-Fi
確率	不確実性	AI, 経済, 保険, 医療
三角関数	波, 周期	音, 波, CG, 通信, 医療
指数関数	急激変化	放射性崩壊, フォロワー増加, 光の減衰 薬の分解, バッテリー減少, 電気回路
対数関数	スケール圧縮	地震, 音, 星の明るさ, データ検索 情報圧縮, エネルギー
数列	反復と予測	アルゴリズム, 予測
行列	変換	AI, 自動運転

① ベクトル / 行列 / 因数分解

高校数学では、 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ や $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ のように高々2つか3つの**成分**で表し、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「**内積**」を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\theta \text{は}\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{のなす角})$$

として定めます。また、ベクトルを成分を用いて、

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

と表した場合には、内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

として算出します。

特に、AIにおいては、ベクトルの成分を**数百次元から数百万次元**として扱い、**画像・音声・文章・単語**を解析するために用いられています。

例えば、犬、猫、車などの画像（絵）をAIは、

犬を $(0.18, -1.1, 2.5, \dots, 0, 0, \dots, 3.2)$

猫を $(0.21, -1.3, 2.7, \dots, 0, 0, \dots, 3.9)$

車を $(-2.4, 0.7, -2.9, \dots, 5.23, -1.8, \dots, 0)$

のようにベクトルで成分化し、内積の値を算出することで、余弦（ $\cos \theta$ ）の値が

1に近い：向きが近い（類似している）

0に近い：無関係

-1に近い：逆の物事

というように解析（判断）しています。つまり、

内積は似ている度合いを表すもの（どれだけ似ているのかを判断する）

としてAIに組み込まれており、内積の値が大きいほど、2つの物事は意味が近いまたは似ているものであるというように解析（または判断）します。

また、ある動物の画像をみせると、細分化した部位についても同様のことを繰り返し実行する（ニューラルネット）ことによって、その画像が〇〇であると判断しているということになります。

AIは、ベクトルを用いて

特徴を抽出 → 顔ベクトル → 耳ベクトル → …… → 動物ベクトル → 犬

というように判断しているということになります。

したがって、ベクトルは、大学受験のみの2次元や3次元での図形的な物事を解決するためのものではなく、

情報を表す道具である

ということになります。

高校数学	AI	
ベクトル	データの表現	(何が含まれているか)
内積	類似度	(似ているものがあるかないか)
成分表示	特徴量	
一次変換	ニューラルネット	($y = ax + b$ で何百万回)
空間図形	位置関係	(関係を把握)

また、数学 I の「数と式」で習得する**因数分解**は

構造をみる力

と言い換えられます。例えば、 $x^2 - 3x + 2$ は

$$(x - 1)(x - 2)$$

と因数分解できますが、AI では、 $x^2 - 3x + 2$ というような画像（絵）があった場合に

$x - 1$: 木を表す

$x - 2$: 池を表す

というように、画像（絵）全体から

特徴を分解（細分化）し意味を理解している

ということになります。

ですから、因数分解を因数分解で終わらせるのではなく

内部構造を見抜く力 / 複雑なデータを意味ある構造に分解する

といった学びに繋がっているという認識をもつ必要があるということです。もっといえば、因数分解は

パターン認識 / 構造理解 / 共通部分の発見 / 特異点があるのか / 本質を抽出

という学習になっているといえるでしょう。AI では、因数分解の着眼点にもとづくところが一部にあるということでもあります。

さらに、中学で学ぶ一次関数 $y = ax + b$ については、 x にある値を入力すると、 y の値が出力されるわけですが、これは

入力 → 出力 → 変換

という、AI の基本構造と直結している内容でもあります。これを何百万回と繰り返して実行して、画像（絵）などを解析しています。

このように高校数学で習得するベクトルは、AI においても欠かせないものとして機能していることが理解できるでしょう。

② 微分法 / 2 次関数

高校数学では、**平均変化率**、**接線の傾き**などを習得しますが、AI においては、

AI の「学習」そのもの

に使われています。簡単にいえば、AI は「微分」によって賢くなり、誤差を減らしているということになります。具体的には、「微分」をするということは、「いま」を把握するだけでなく、**どの方向に変化しているのか、どちらに行けばより誤差が減るのか**といった、**AI の学習のメカニズム（仕組み）そのもの**に使われており、**間違いをできる限り減らすことに利用されている**といっても過言ではありません。

例えば、車の画像（絵）を与えた場合に

車：80%

飛行機：20%

判断されたら、これは失敗で誤りです。

そこで、どう修正すれば正解に近づくかを考えるのが「微分」です。つまり、「どちらかに少し動くと、どう変化するのか」を考察しなければならないため、右へ行くと誤差が増加するのか、それとも左へ行くと誤差が減るのかを知りたいという場面で、「微分」の基本的なアルゴリズムを使っているということになります。

また、AI には、誤差を表す関数

$$L = (\text{予測} - \text{正解})^2$$

があり、この L をできる限り 0 に近づけさせることが目標となります。

この関数は **2 次関数** ですから、これも高校数学の数学 I で習得する内容となっており、AI では、すべてではありませんが誤差を減らす関数の一つに 2 次関数が用いられています。つまりは、この立場で述べると、AI において

$$y = a(x - p)^2 + q$$

における頂点 (p, q) を **最適化** と解析し、それを安定していると判断しています。もつといえば、高校で 2 次関数を学ぶということは

誤差を最小にする / 安定な状態を見出す

といってもよいわけです。

では、なぜ 2 乗するのかといえば

正負をなくす / 大きなミスを強調できる / なめらかに微分できる

という特徴を利用することができ、**自然界は最小状態を好む**ということから、**安定（頂点）付近での世界は放物線的な振る舞い**にもなり、これらを通してできる限り正しい出力ができるようにこれらを繰り返し実行していることになります。

③ 場合の数と確率 / 指数・対数関数

高校数学では、「場合の数」を習得した後に、「確率」、すなわち、**不確実性を学ぶ**こととなりますが、AIでは

次に何が起こりやすいか

を判断しながら出力しています。

例えば、「私は今日、学校に○○」という文に対し、○○には

「行く」：70%、「向かう」：15%、「通う」：3%、…、「飛ぶ」：0.00001%

というように、AIは**最も確率が高い単語を出力している**ということになり、これはまさに**条件付き確率**と同じものであると理解できるでしょう。つまり

$$\frac{(\text{次の単語})}{(\text{これまでの文章})}$$

を基本にして大量のデータから、最大確率のものを選んで出力しています。言い換えれば、AIは、**本質的に確率マシン**といっても過言ではありません。

ですから、AIが次の手・その次を考えるにあたっては、場合の数で習得する

樹形図・順列・組み合わせ

などが基本的に使われているということに他なりません。

高校数学	AI
条件付き確率	次の単語予測
確率分布	単語の候補
独立試行	モデル化
ベイズ統計	推論更新
期待値	最適化

このように高校数学で習得する学びは、AIにおける基本的な軸足になっているということが少しずつ理解できるでしょう。

さらに、 e^x （**指数関数**）をこれに組み込むことによって

$$p = \frac{e^{x_i}}{\sum e^{x_j}} \left(= \frac{\text{ある事象が起こる場合の数}}{\text{全事象}} \right)$$

のように確率へ変換し、大きい値は強調でき小さい値は極小化できるため、AIは正解の確率を高く見積もって出力したいと考えている（目標としている）ことから、そもそも100%正しいとは考えていません。やはり、AIにおいても

可能性と不確実性の両輪を扱っている

ということになります。

④ 三角関数 / 数列

高校数学では、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ に関するたくさんの公式などが教科書などで掲載され散見されますが、AIにおいては、 $\sin$ 、 $\cos$ を多く使って、すべてではありませんが、文章、画像、音声における

規則、順番、リズムを自然に表現

することの一部に利用しています。

三角関数の特徴は、**位置を少し変えると値も少ししか変わらないことから**、与えられた資料（文章、画像、音声など）を相対的な位置として表しやすく、加法定理では位置の差を扱い、近い単語や近い位置を自然に表現することができています。

また、音を周波数、波形、振動に分解することによってフーリエ変換を駆使して解析したり、特徴的な「量」もこれに組み込むことによって、正しく出力することができるようになっています。

つまり、三角関数は、AIでは

順番を理解するために使われている

といってもよいかもしれません。

また、これに加え「**数列**」分野もAIでは大きな役割を担っています。本質的には**漸化式**です。すなわち、**前の状態から次の状態を作る**という特徴をいかしています。

AIでは

現在の状態 → 誤差 → 修正

の繰り返しを何億回と実行しながら、正しく出力できるように調整しています。

さらに、数列の構造では

前後関係、時系列、順序

が数学的観点ですから、これを利用しているといっても過言ではないでしょう。

高校数学	AI
$\sin$ 、 $\cos$	位置の表現
周期性	時系列予測
加法定理	相対的な位置
波	音声解析
回転	3D 認識
三角比	ロボット制御

高校数学	AI
漸化式	学習更新
一般項	モデル化
極限	学習収束
等比数列	指数的变化
再帰	再帰型ニューラルネット
順序	言語理解と出力

ざっと高校数学で習得する学びを、AIに照らし合わせてみるだけでも、数学を勉強しないということは、科学技術がどのようにして生まれているのかすらわかっていないということになりかねません。

上述したことを簡素化すると、AIでは

ベクトルで情報を表す
微分して学習する
確率で予測する
指数で確率化を実行する
数列で更新する
三角関数で順序を理解する

というように、高校数学が対応している部分がほとんどです。

社会に出ると、文系理系を問わず、「数学の問題が解けるから君は優秀だ!」ということは少なくなり、「**数学の観点を利用し、世界・社会の構造を再編する、または構築する**」ことが優先されるようになります。ですから、特に文系で数学を捨てたり難しいなどといっている場合ではないということになります。

ただ一方で、数学のみで世界や社会を完全に理解できるわけではありません。

文学、文化・歴史、哲学、芸術、倫理

などの分野は

感情理解、価値観、人類の所業、人間理解、公平性

を理解するための基盤であることはいうまでもなく

数学的立場による観点（構造をみる眼）＋ 人文学的な視点（人間をみる眼）

の両方がつねに必要です。

数学的立場による観点（構造をみる眼）とは、上述してきたように

感情のみで判断しない
構造をみる
条件を整理する
因果関係を考察する
極端な例に流されない（惑わされない）
本当かどうかを検証する

ことにつながり、物事の仕組みを理解することでもあるということです。

また、

数学は世界や社会の共通構造を見つける学問

といってもよいでしょう。

例えば、**音楽、海の波、電波、光、心電図**は、全く異なる違う現象にみえますが、その異なる現象に同じ構造があるという関係性を見出すことができます。

つまり

何が本質か

何が共通構造か

どこに法則があるのか

どのような関係があるのか

といった**思考法を学んでいる**ということを理解しなければなりません。それらを理解すると、問題を解くということではなく

抽象化、論理、モデル化、構造理解

といった「学び」にシフトできるようになり、物事をみる目（眼）が変化するでしょう。

一方で、**文系**においても数学がその基盤であるものがあり、例えば

経済学：統計、最適化

心理学：確率、統計、データ解析

社会学：相関、モデル化、シミュレーション

言語学：構造、論理

哲学：論理、抽象化

法学：論理、構造

などは、数学の観点が盛り込まれています。

最後になりましたが、この先の約10年を考えると

AI、アルゴリズム、データ、統計モデル

が社会基盤となることから、数学を学ぶことを捨てると、社会そのものの仕組みを理解できなくなる可能性が高くなるということでもあります。

ですから、高校数学の問題を解くということよりも、それらの問題群の中から、この分野はどのような「眼」を養っているのかを理解することを優先する方がきつとあらゆることを考えるときに大きく役に立つものと考えます。言い換えれば

数学は、世界と社会の奥にある構造をよむための言語

といえるでしょう。

さらに、今後は**複素数**の学びも欠かせなくなり、大きな飛躍を迎えることができ

と思います。なぜなら、**量子レベルの計算**では、そのいくつかは複素数でなされるからです。上述した因数分解はあくまでも有理数の世界（範囲）であり、例えば、 $x^2 + x + 1$ は実数の世界では、これ以上何もできませんが、複素数まで拡張すると

$$x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$$

のように因数分解でき、**解像度をさらに高めることができる**という着眼点になります。また、複素数は

音の強さ、波のズレ（位相）、回転

などを同時に扱えることから、**見えない世界を複素数によって自然に表現できるようになります**。世の中で、**量子コンピュータ**が囁かれています。今後は複素数を理解することによって、さらに世界の景色が新しくなっていくということになるでしょう。

この度は、高校数学における学びがAIにどのようにいかされているのかといった観点でいろいろと述べましたが、世の中をみてみると、AI以外にも

自動運転、CG、暗号、GPS、音声認識、画像生成、金融工学

などの入り口も高校数学の内容で十分に対応できるものがあります。

このように考えると、高校数学は

大学で学ぶ数学の核心だけを抽出したエッセンス集合

とよべるものであり、世の中に現存する

科学技術や物理の仕組みの見え方捉え方が一気に変わる

という学びにもつながるということです。

数学だけでなく、あらゆる教科を入試科目または高得点をとるための教科と考えるととても勿体無い学びとなり、すなわち、入試で合格するための勉強（手段の勉強であり、目的が失効される）となり、モチベーションも長く続かないことが目に見えています。そのような勉強は表面的であり、面白みにも欠けることから、本来の学びである「目的」からも程遠くなります。

そうならないためにも、勉強すること学ぶことは、**世界を紐解くためのエッセンスである**というつながりが重要な観点になってきます。

大学に進学した場合にも、あらゆる**専門分野の基礎・基本的な学びは重要な位置付け**ですが、それ以上に、その分野からどのような「眼」を習得できるのかを優先して対応することの方が、楽しい世界・社会につながる可能性は高いものです。学びの「目的」を見失わないように心がけたいものです。