2　具体と抽象の「学び」の往還

前回は「**数学的活動と言語活動の間で**」というテーマを主軸に，話をさせていただきました。ある物事や問題の表現は異なろうとも，数学を学ぶことによって，いくつかの事例が，実は１つの数式で解決できるような話をさせていただいた次第です。これは「数学」を学ぶことで培われる特徴的なことの１つといってもよいでしょう。

さて，今回は，中学・高校数学において，教科書で習得した１つひとつの事項を，どのようにつなぎ合せ利活用していけばよいのかということにスポットライトを当て，以下の $\boxed{\text{例題４}}$ を参考に話をすすめていきたいと思います。抽象的な問題と具体的な事例を通して，**具体と抽象を往還する「学び」**について触れたいと思います。

例題４

p，qを正の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ は $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の間にあることを示せ。

(2)　$\sqrt{2}$ は $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ のどちらにより近いかを述べよ。

「距離」の概念は小・中学校で習得していますが，そもそも人間は，年齢が10歳前後になると，「距離」を肌感覚で身につけているものと思われます。日常生活のなかで利用する「距離」とは，学校までの「距離」や自宅（家）までの「距離」など，**具体的**な「距離」としての位置付けが多いことは経験済みと思われます。

高校の数学Ⅰの教科書では，「距離」についての解説は，**絶対値**の記号を登場させ述べられています。高校数学の特徴の１つとして，これまでに身につけてきた具体的な物事を抽象的なことへと誘う道標的な問題が存在し，そのような「学び」が促進できるようにと，それらを感受する内容が一部盛り込まれており，これまでの「学び」が簡素化され，抽象化されるものといってもよいでしょう。この部分については，前回の話とつながるところもあり，具体的な事例はもちろん１つとは限りません。

教科書に掲載されている問題は，上述したように具体的なことと抽象的なことを往還する「学び」を体感でき，数学的にも重要な位置付けとして，その意義を大きく含んでいるものといえます。それを看過し，問題演習やパターン問題の羅列だけの対応では，$\boxed{\text{例題４}}$ の難易度は高く受けとられても仕方がないものだと思います。その理由として多く耳にするのは，「どのようなことを証明すればよいのかがわからない」ということのようです。その理由を１つに定めることはできませんが，「**数学的活動と言語活動の間で**」において触れたことにも一部つながることがあるかもしれません。

そこで，抽象的な問題と受けとられる **例題４** を，具体的な事例を通して考えてみましょう。たとえば，自宅と学校と自分を点と捉えることと，その３点が同一直線上にあるときの様子をイメージし，今の自分（点）は，自宅に近いのかそれとも学校に近いのかということを，数学的に考えてみるのも１つかもしれません。現実的（具体的）な話では，どちらに近いのかという論考は，数学的ではなく直感的（肌感覚）に対応していることが多いようです。むしろ，具体的なことでは，それに頼ることは自然ともいえ，「真ん中の点（自宅と学校の中点）はどこだろうか」ということくらいを直感的に定め，自分が今いる地点は，どちらに近いのかを判断しているのではないのでしょうか。そのときの「距離」については，自宅と学校と自分が同一直線上に存在しないときも含まれているわけですから，**円の性質**などを自然と利用していることもあり得ます。これらの判断や表現は**数学と言語の活動に直結**しており，このようなことを数学的にとらえる目を養うことこそ，「数学教育」の意義だと感じます。

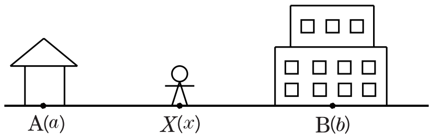

図 1

そこで，図１のように，自宅と学校と自分が同一直線上にあるとき，それをある方向からみると，自宅が左側，学校が右側に位置する場合と，図２のように，その反対側からみた場合が考えられます。これらのことを把握し理解することによって，抽象化された **例題４** の (2) に対応可能な部分が生じるかもしれません。

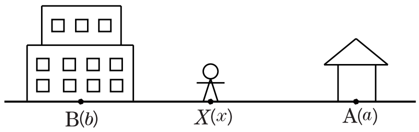

図 2

一方の， **例題４** の (1) は，自分が自宅と学校の間に存在するというようなことを示すような問題ですから，$\sqrt{2}$ はまさに，図１（図２）における自分という点 X に対応し，$\dfrac{q}{p}$ および $\dfrac{2p+q}{p+q}$ を自宅（点 A）または学校（点 B）に１つずつ対応させることによって，具体的な事例の１つとして，そのイメージに結ぶことができることもあるでしょう。ここでは，$\sqrt{2}$ が $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の間にあるということを示すわけですから，$\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の大小関係は調べる必要はありません。

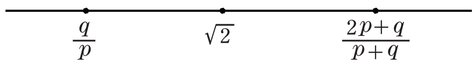

図 3

ただ，図３や図４のように，$\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の大小関係を調べることは，p，q に関する考察につながり，他の観点を養うことができます。

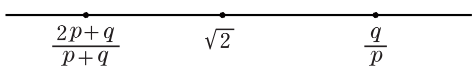

図 4

したがって，数直線上における $(x-a)$ や $(x-b)$ に着目することは自然な流れであり，これらの２つの式の積，すなわち，

$(x-a)(x-b)$ の値が負であるとき，どのようなことが実現されているのか

$(x-a)(x-b)$ の値が正であるとき，どのようなことが考えられるのか

を数学的に吟味することで，**具体と抽象の「学び」の往還**を体感することができるものだと思いますが，いかがでしょうか。

以上のように，$\sqrt{2}$ が $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の間にあることを示すには，$\left(\sqrt{2}-\dfrac{q}{p}\right)$ と $\left(\sqrt{2}-\dfrac{2p+q}{p+q}\right)$ の積，すなわち $\left(\sqrt{2}-\dfrac{q}{p}\right)\left(\sqrt{2}-\dfrac{2p+q}{p+q}\right)$ の値が負であることを示せればよいことになります。

さらに，(1) で示したことに対し，(2) では，$\sqrt{2}$ がよりどちらに近いのかを調べることになるわけですから，$\sqrt{2}$ と $\dfrac{q}{p}$ との「距離」と $\sqrt{2}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ との「距離」の大小を考察していくことになり，すなわち，絶対値による $\left|\sqrt{2}-\dfrac{q}{p}\right|$ と $\left|\sqrt{2}-\dfrac{2p+q}{p+q}\right|$ の大小関係を見出すことになるでしょう。

今回は，**言葉**から得られる情報（問題）に対し，具体と抽象の「学び」の往還の１例について，述べさせていただきました。数学の立場で問題を紐解くには，**言語活動**は欠かせないものであり，**新しい知識が既得の知識や経験と関係づけられて有機的に構造化され，それらが自分の中で形成される知識として機能し，いくつかのことと結ばれていくこと**は，自分（学習者）の中に「何か」が生まれることに他ならないことです。１つひとつの基礎・基本事項が点々バラバラな状態でいずれ忘れ去られていく前に，数や式の構造とそれらが織り成す仕組みを言葉と数式（図）などでとらえ体感する喜びは，数学教育のあるべき姿であり，その意義はとても高いものだと信じています。

（以下，$\boxed{\text{例題４}}$ の参考解説となります）

(1)　$\sqrt{2}$ が $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の間にあることを示すには，$\left(\sqrt{2}-\dfrac{q}{p}\right)\left(\sqrt{2}-\dfrac{2p+q}{p+q}\right)$ の値が負となればよい。このとき，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{2p+q}{p+q}\right)&=\frac{\sqrt{2}\,p-q}{p}\cdot\frac{\sqrt{2}\,p+\sqrt{2}\,q-2p-q}{p+q}\\&=\frac{\sqrt{2}\,p-q}{p}\cdot\frac{(\sqrt{2}\,p-q)-\sqrt{2}(\sqrt{2}\,p-q)}{p+q}\\&=\frac{(\sqrt{2}\,p-q)^2}{p(p+q)}\cdot(1-\sqrt{2})\end{aligned}$$

である。

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ であり，$1-\sqrt{2}<0$ であり，$(\sqrt{2}\,p-q)^2>0$，$p(p+q)>0$ であるから

$$\left(\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{2p+q}{p+q}\right)<0$$

である。

したがって，

$\sqrt{2}$ は $\dfrac{q}{p}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ の間にある

ことが示された。　**（終）**

(2)　$\sqrt{2}$ と $\dfrac{q}{p}$ との距離および $\sqrt{2}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ との距離の大小関係を調べればよい。

　このとき，$\sqrt{2}$ と $\dfrac{q}{p}$ との距離は

$$\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|=\frac{1}{p}|\sqrt{2}\,p-q| \quad \cdots\cdots \quad ①$$

と表せ，一方，$\sqrt{2}$ と $\dfrac{2p+q}{p+q}$ との距離は

$$\left|\sqrt{2}-\frac{2p+q}{p+q}\right|=\frac{1}{p+q}|(\sqrt{2}\,p-q)(1-\sqrt{2})|=\frac{\sqrt{2}-1}{p+q}|\sqrt{2}\,p-q| \quad \cdots\cdots \quad ②$$

と表せる。

　そこで，①と②において，$|\sqrt{2}\,p-q|>0$ は共通しているから

$$\frac{1}{p} \text{ と } \frac{\sqrt{2}-1}{p+q} \text{ の大小関係}$$

がわかればよい。

　ここで，p，q は正の整数であるから

$$p<p+q$$

であり，また，$0<\sqrt{2}-1<1$ であるから

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{p+q}>\frac{\sqrt{2}-1}{p+q}$$

と評価でき，①と②より

$$\frac{1}{p}|\sqrt{2}\,p-q|>\frac{2p+q}{p+q}|\sqrt{2}\,p-q|$$

すなわち

$$\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right|>\left|\sqrt{2}-\frac{2p+q}{p+q}\right|$$

である。

　したがって，

$\sqrt{2}$ は $\dfrac{q}{p}$ と比べ，$\dfrac{2p+q}{p+q}$ の方に近い。　**(答)**