

# 自然数の美しい対称構造

レクリエーション数学としての相愛数

竹村 謙一

Independent Researcher (Tokyo, Japan)

## 概要

1, 2, 3, …。指を折って数えることができる、私たちに馴染み深い自然数。その中には、まだ知られていない美しい秘密が数多く隠されています。本稿では、1 から 16 までの自然数を行優先で並べた「4 次自然方阵」の中に潜む、驚くほど意外な数の関係性——**相愛数 (Soaisu)**——を紹介します。相愛数とは、1 乗から  $k$  乗までの累乗和がすべて等しくなる複数の集合のことで、整数論の古典的難問である Prouhet–Tarry–Escott 問題と深く関わる概念です。具体的な数値計算を随所に示しますので、電卓を片手にご一読いただくと幸いです。

### この記事について：

本稿は「研究ファイル」に掲載された**相愛数シリーズ**の一環として作成した記事です。

#### 第 1 弾 「算数や数学の学習教材としての相愛数」

4 次自然方阵に潜む 4-4 相愛数 ♡♡♡ を紹介。電卓で体験できる数のミステリーとして、小・中学生から探究心旺盛な学習者まで幅広く活用できる導入記事です。

#### 第 2 弾 「相愛数の背後にひそむ円」

相愛数を複素平面で捉え直し、同一円に内接する 2 つの正  $n$  角形が強度  $n - 1$  の相愛数をなすことを「正多角形の相愛定理」として証明。自然数の相愛関係が円の回転対称性を 1 次元に折りたたんだものであることを明らかにしました。

**前提知識：**第 1 弾は算数・中学数学の知識で読めます。第 2 弾は高校数学 C「複素数平面（複素平面）」が題材ですが、本稿（第 3 弾）は複素数の知識がなくても、**高校数学の等差数列と累乗の基礎**があれば最後まで読み解けます。3 篇はそれぞれ独立して読めますが、順に通読すると「数の不思議 幾何的背景 構造の解明」という一本の物語として楽しめます。

数の対称構造を探る「生きた数学」の題材として、授業や探究活動のお役に立てば幸いです。

## 1 相愛数って何だろう？

まず、本稿の主役「相愛数」を紹介しましょう。

### 定義：相愛数 (Soaisu)

$m$  個の多重集合  $S_1, S_2, \dots, S_m$  (各集合はそれぞれ  $n$  個の整数を含む) が、 $l = 1, 2, \dots, k$  のすべてに対して

$$\sum_{a \in S_1} a^l = \sum_{a \in S_2} a^l = \dots = \sum_{a \in S_m} a^l$$

を満たすとき、これらを**強度  $k$  の  $\underbrace{n-n-\dots-n}_{m \text{ 個}}$  相愛数**と呼ぶ。

強度は ♡ の個数で表し、たとえば強度 3 の 4-4 相愛数を **4-4 相愛数 ♡♡♡** と書く。

ひとことで言えば「1 乗から  $k$  乗までの累乗和がすべて等しい自然数の組」です。数たちが累乗和という絆で結ばれている様子を表しています。

**PTE 問題との関係**：相愛数という概念は、整数論の古典的な難問 **Prouhet–Tarry–Escott (PTE) 問題**と深く関わっています。

## 2 4 次自然方陣の中の 4-4 相愛数 ♡♡♡

次に相愛数たちがシンメトリックな舞踏を演じる舞台となる「4 次自然方陣」を定義しましょう。

**定義**： $n$  次自然方陣

1 から  $n^2$  までの連続する自然数を、行優先（左から右・上から下）で  $n \times n$  のマスに配置した正方配列を  $n$  次自然方陣と呼ぶ。

4 次自然方陣 ( $n = 4$ ) は以下のようになります。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図1 4 次自然方陣

さて、この方陣の中からある 8 つの数に注目してみましょう。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図2 ブルーグループ {2, 8, 9, 15} とピンクグループ {3, 5, 12, 14}

- ブルーグループ  $S_B : \{2, 8, 9, 15\}$
- ピンクグループ  $S_P : \{3, 5, 12, 14\}$

では、ここで2つの集合における各要素の累乗和を比較してみましょう。

表1 各四元集合における各次累乗和の計算結果

集合	1 乗和 ( $\sum a$ )	2 乗和 ( $\sum a^2$ )	3 乗和 ( $\sum a^3$ )	4 乗和 ( $\sum a^4$ )
$S_B$ (ブルー)	34	374	4624	61298
$S_P$ (ピンク)	34	374	4624	59858
判定	一致 (✓)	一致 (✓)	一致 (✓)	不一致 (×)

計算の結果、1 乗和から 3 乗和までは完全に一致し、4 乗和で突如として均衡が崩れます。互いに異なる 2 組の 4 数について、1 乗、2 乗、3 乗の和が、それぞれぴったり一致するという事実は、偶然と片づけるにはあまりに不自然ではないでしょうか？そして、なぜ 3 乗まで一致して、4 乗で崩れるのか？探究心あふれる生徒ではあれば、問いは次から次に生まれてくることでしょう。実は、この一致の現象は裏では、数学において最重要概念とも言える円や正多角形という存在たちが糸を引いているのです。その幾何学的な背景の詳しい解説は、本シリーズ第 2 弾「相愛数の背後にひそむ円」で行っていますので、興味のある方はぜひご覧ください。

さて、本稿では「なぜこのような相愛数が存在するか」という問いとは少し視点を変え、相愛数たちに潜在する新たな性質に焦点を当てていきます。

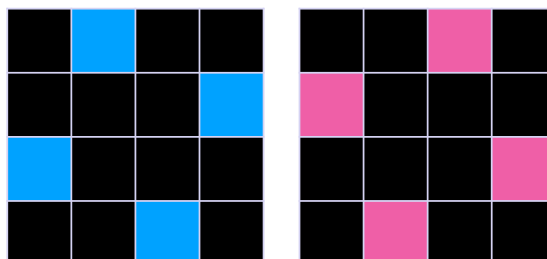


図3 4次自然方陣における 4-4 相愛数♡♡♡ポジション

ここで、この2つのグループの配置をよく見てください。ブルーグループとピンクグループは、方陣の中で左右反転（上下反転）の対称関係にあります。相愛数は対称性と深く結びついた概念であることがこの配置からも示唆されているようです。この「対称性」というキーワードは、本稿に繰り返し登場します。

### 3 外周を $1 \times 3$ ブロックで分割すると……

では、4次自然方陣の外周（枠を構成する12個の数）に注目することにします。このエリアの数たちを使って、ちょっとおもしろいものをお見せしましょう。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図4 4次自然方阵の外周12数

まずは以下のように、これら12数を「1×3ブロック」4枚で分割してみましょう。

分割パターン A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図5 分割パターン A :  $B_{A1} = (1, 2, 3)$ ,  $B_{A2} = (4, 8, 12)$ ,  $B_{A3} = (16, 15, 14)$ ,  $B_{A4} = (13, 9, 5)$   
の4ブロックに分割。各ブロックは等差数列をなす3数

$$B_{A1} = (1, 2, 3), \quad B_{A2} = (4, 8, 12), \quad B_{A3} = (16, 15, 14), \quad B_{A4} = (13, 9, 5)$$

分割パターン B

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図6 分割パターン B :  $B_{B1} = (2, 3, 4)$ ,  $B_{B2} = (8, 12, 16)$ ,  $B_{B3} = (15, 14, 13)$ ,  $B_{B4} = (9, 5, 1)$   
の4ブロックに分割。各ブロックは等差数列をなす3数

$$B_{B1} = (2, 3, 4), \quad B_{B2} = (8, 12, 16), \quad B_{B3} = (15, 14, 13), \quad B_{B4} = (9, 5, 1)$$

ちなみに、このような分割の方法は**分割パターン A・分割パターン B**の**2通り**しかありません。なお、この2つの分割パターンは**左右反転（上下反転）の対称関係**にあります—前節で  $S_B$  と  $S_P$  が方陣の中で対称な位置にあったことと、同じ「対称性」というキーワードがここでも登場しています。

何の目的があって、こんなことを試みるのか疑問に思っている方もいらっしゃることでしょう。じつは、この操作によって**すでに新たな相愛数が生み出されている**のです。どういうことでしょうか？

### 3.1 各ブロックの和を集めると……

ここで各ブロックの3数の和を計算してみましょう。

	ブロック 1	ブロック 2	ブロック 3	ブロック 4
分割パターン A	$1 + 2 + 3 = 6$	$4 + 8 + 12 = 24$	$16 + 15 + 14 = 45$	$13 + 9 + 5 = 27$
分割パターン B	$2 + 3 + 4 = 9$	$8 + 12 + 16 = 36$	$15 + 14 + 13 = 42$	$9 + 5 + 1 = 15$

各分割パターンのブロック和をまとめた集合を、それぞれ **和集合  $T_A$** 、**和集合  $T_B$**  と呼ぶことにします。

- **和集合  $T_A$**  (分割パターン A のブロック和) :  $T_A = \{6, 24, 45, 27\}$
- **和集合  $T_B$**  (分割パターン B のブロック和) :  $T_B = \{9, 36, 42, 15\}$

さあ、ここが見どころです。この2つの集合の累乗和を比較してみましょう。

表2 和集合  $T_A$ 、 $T_B$  における各次累乗和の計算結果

集合	1 乗和 ( $\sum t$ )	2 乗和 ( $\sum t^2$ )	3 乗和 ( $\sum t^3$ )	4 乗和 ( $\sum t^4$ )
$T_A$	<b>102</b>	<b>3,366</b>	<b>124,848</b>	4,965,138
$T_B$	<b>102</b>	<b>3,366</b>	<b>124,848</b>	4,848,498
判定	一致 (✓)	一致 (✓)	一致 (✓)	不一致 (×)

どうでしょう。3 乗和にいたるまで見事に一致しているではありませんか!?

#### 発見

外周の  $1 \times 3$  ブロック分割から得られる和集合  $T_A$  と  $T_B$  もまた、**4-4 相愛数 ♡♡♡** をなす!

いや、ここで起きていることはどうやらそれ以上です。ここで、元の相愛数  $S_B = \{2, 8, 9, 15\}$  と新しく得られた和集合  $T_A$  (または  $T_B$ ) の累乗和の比を計算すると……

$$\frac{102}{34} = 3, \quad \frac{3,366}{374} = 9, \quad \frac{124,848}{4,624} = 27$$

なんと  $3^1, 3^2, 3^3$  という **3 の累乗数** が現れました！なぜでしょう？このような不思議な現象も数学的に説明がなされるものなのでしょうか？もちろん、答えは Yes です。次のセクションで種明かしをしますが、その前に、ちょっと時間をとって考えてみてください。

## 4 種明かし：なぜ新たな相愛数が生成されたのか？

### 4.1 等差数列が証明の鍵

各ブロックをよく見てください。たとえばブロック  $B_{A1} = (1, 2, 3)$ 。これは「中央の数を  $a$ 、公差を  $d$  とした等差数列  $\{a-d, a, a+d\}$ 」ですね（ここでは  $a=2, d=1$ ）。この3数の**和**を計算すると

$$(a-d) + a + (a+d) = 3a$$

公差  $d$  が消えて、**中央値  $a$  の3倍**になります！分割パターン A の各ブロックについて確かめましょう。

ブロック (分割パターン A)	中央値 $a$	公差 $d$	和 $3a$
$B_{A1} = (1, 2, 3)$	2	1	$3 \times 2 = 6$
$B_{A2} = (4, 8, 12)$	8	4	$3 \times 8 = 24$
$B_{A3} = (16, 15, 14)$	15	1	$3 \times 15 = 45$
$B_{A4} = (13, 9, 5)$	9	4	$3 \times 9 = 27$

つまり  $T_A = \{6, 24, 45, 27\} = \{3 \times 2, 3 \times 8, 3 \times 15, 3 \times 9\}$  であり、分割パターン A の各ブロックの中央値の集合  $\{2, 8, 15, 9\}$  は  $S_B = \{2, 8, 9, 15\}$  と同一です。すなわち  $T_A$  は  $S_B$  の各要素を **3倍したものです**！

同様に、分割パターン B の各ブロックの中央値の集合  $\{3, 12, 14, 5\}$  は  $S_P = \{3, 5, 12, 14\}$  と同一であり、 $T_B = \{3 \times 3, 3 \times 12, 3 \times 14, 3 \times 5\} = \{9, 36, 42, 15\}$  となります。

#### 鍵となる事実

外周  $1 \times 3$  ブロック分割の和集合は、**元の相愛数集合の各要素を3倍したものである**。

以下、集合の各要素を定数倍したものを**スケーリング**と呼ぶことにします。

### 4.2 スケーリングしても相愛数のまま

ここで、相愛数の重要な性質を確認します。

#### 定理：スケーリング不変性

集合  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  と  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  が強度  $k$  の相愛数であるとき、各要素を定数  $c$  倍した集合  $\{cx_1, \dots, cx_n\}$  と  $\{cy_1, \dots, cy_n\}$  も強度  $k$  の相愛数である。

証明：

$$\sum_i (cx_i)^l = c^l \sum_i x_i^l = c^l \sum_i y_i^l = \sum_i (cy_i)^l \quad (l = 1, \dots, k)$$

$c^l$  は両辺に等しくかかるので、累乗和の一致関係は保たれます。 □

ここでは  $c=3$  としています。  $S_B, S_P$  が 4-4 相愛数♡♡♡ ですから、 $T_A$  と  $T_B$  もまた 4-4 相愛数♡♡♡ になるのは必然です！

### 4.3 3の累乗比の理由

累乗和の比が  $3^1, 3^2, 3^3$  になる理由も、スケーリング不変性から直接出てきます。 $\sum_{t \in T_A} t$  を、集合  $T_A$  のすべての要素の和を表すものとする、 $l=1, 2, 3$  について

$$\frac{\sum_{t \in T_A} t^l}{\sum_{s \in S_B} s^l} = \frac{\sum_i (3s_i)^l}{\sum_i s_i^l} = \frac{3^l \sum_i s_i^l}{\sum_i s_i^l} = 3^l$$

スケール因子  $c=3$  が  $l$  乗されるため、 $l=1, 2, 3$  のとき、比はそれぞれ  $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27$  になります。べき乗の同次性 (homogeneity) と呼ばれる、非常にシンプルな性質です。

#### まとめ：二段階の構造

1. 等差数列の中央値性：各ブロックの和 =  $3 \times$  中央値  
 $\Rightarrow$  和集合は元の相愛数集合を 3 倍スケーリングしたもの
2. スケーリング不変性：集合の各要素を定数倍しても相愛数は相愛数のまま  
 $\Rightarrow T_A, T_B$  も 4-4 相愛数♡♡♡ であることが保証される
3. べき乗の同次性：累乗和の比は、 $c=3$  のとき  
 1 乗和ならば 3、2 乗和ならば 9、3 乗和ならば 27

## 5 積の総和も一致する！

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図7 分割パターン A と分割パターン B

じつは、これら外周  $1 \times 3$  ブロックたちがなす美しい関係性については他にも紹介したいことがあります。ここまではブロック内の 3 数の和を考察の対象としていましたが、こんどはブロック内の 3 数の積をとり、分割パターンごとにそれら 4 つの積の総和をとってみることにしましょう。

分割パターン A について

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3}_{B_{A1}} + \underbrace{4 \times 8 \times 12}_{B_{A2}} + \underbrace{16 \times 15 \times 14}_{B_{A3}} + \underbrace{13 \times 9 \times 5}_{B_{A4}} = 6 + 384 + 3,360 + 585 = \mathbf{4,335}$$

分割パターン B について

$$\underbrace{2 \times 3 \times 4}_{B_{B1}} + \underbrace{8 \times 12 \times 16}_{B_{B2}} + \underbrace{15 \times 14 \times 13}_{B_{B3}} + \underbrace{9 \times 5 \times 1}_{B_{B4}} = 24 + 1,536 + 2,730 + 45 = \mathbf{4,335}$$

何が起こったか、わかりましたか？そうです。分割パターン A と B で積の総和まで一致しているのです。いったいこれはどういうことなのでしょう？

## 5.1 等差数列の積の分解

各ブロックは等差数列  $\{a-d, a, a+d\}$  ですので、積を展開します。

$$P = (a-d) \cdot a \cdot (a+d) = a(a^2 - d^2) = a^3 - ad^2$$

したがって、全 4 ブロックの積の総和は

$$\underbrace{\sum P}_{\text{全ブロック}} = \underbrace{\sum a^3}_{\text{中央値の 3 乗和}} - \underbrace{\sum ad^2}_{\text{補正項}}$$

この 2 つの部分が分割パターン A と B で等しいことを確認すれば、証明完了です。

### 第 1 項 (中央値の 3 乗和) の一致

分割パターン A の中央値集合は  $\{2, 8, 9, 15\} = S_B$ 、分割パターン B の中央値集合は  $\{3, 5, 12, 14\} = S_P$  でした。

$S_B$  と  $S_P$  は 4-4 相愛数 ♡♡♡ ですから、3 乗和は等しい。

$$\sum_{a \in S_B} a^3 = \sum_{a \in S_P} a^3 = 4,624 \quad \checkmark$$

### 第 2 項 (補正項) の一致

各辺の公差  $d$  は分割パターン A と B でまったく同じです。

辺	分割パターン A の中央値 $a_A$	分割パターン B の中央値 $a_B$	公差 $d$	$a_A - a_B$
上辺	2	3	1	-1
右辺	8	12	4	-4
下辺	15	14	1	+1
左辺	9	5	4	+4

補正項の差を計算します。

$$\begin{aligned} \sum_A a_i d_i^2 - \sum_B a_i d_i^2 &= 1^2 \times (-1) + 4^2 \times (-4) + 1^2 \times (+1) + 4^2 \times (+4) \\ &= -1 - 64 + 1 + 64 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

実際、補正項の値はどちらのパターンも同じ値になります。

$$\begin{aligned} \sum_A a_i d_i^2 &= 2 \times 1^2 + 8 \times 4^2 + 15 \times 1^2 + 9 \times 4^2 = 2 + 128 + 15 + 144 = 289 \\ \sum_B a_i d_i^2 &= 3 \times 1^2 + 12 \times 4^2 + 14 \times 1^2 + 5 \times 4^2 = 3 + 192 + 14 + 80 = 289 \end{aligned}$$

したがって積の総和は  $4,624 - 289 = 4,335$  となり、両パターンで一致することが確認できます。

#### なぜ積の総和が一致するのか

$$\underbrace{\left( \sum_{a \in S_B} a^3 - \sum_{a \in S_P} a^3 \right)}_{= 0 \text{ (4-4 相愛数 } \heartsuit\heartsuit\heartsuit \text{ の性質)}} - \underbrace{\left( \sum_A a_i d_i^2 - \sum_B a_i d_i^2 \right)}_{= 0 \text{ (対称な公差配置)}} = 0$$

「4-4 相愛数  $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$  である」という性質と、「上下・左右の公差が対称」という幾何的性質が重なり合うことで、積の総和も必然的に一致するのです。

これは偶然ではなく、4次自然方阵が持つ**2つの独立な対称性の合わせ技**でした！

## 6 方阵全体を $1 \times 2$ ブロックで分割する

前節までは方阵の「外周」のみに注目しました。今度は視野を広げ、**方阵全体**の16個の数を  $1 \times 2$  ブロック(隣り合う2数のペア)8枚で分割してみましょう。分割の仕方はたくさんありますが、ここでは次の4つのパターンに注目します。なお本節では、方阵全体の分割をそれぞれ**分割パターンI~IV**と呼ぶことにします。

### 6.1 4通りの分割パターン

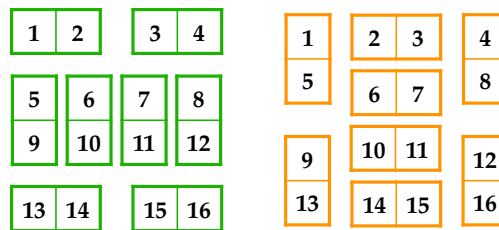


図8 分割パターンI (左) とII (右)

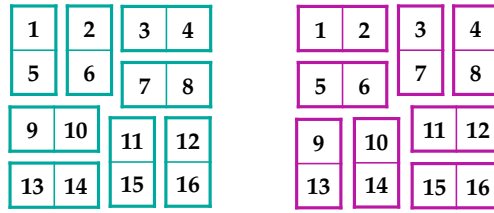


図9 分割パターン III (左) と IV (右)

分割パターン I、II は **90 度回転** の関係、分割パターン III、IV は **左右 (上下) 反転** の関係にあります。前節までの「反転」に続き、「回転」という新たな対称関係も登場しました。

## 6.2 各パターンの「和の集合」を計算する

各  $1 \times 2$  ブロックに含まれる 2 数の和を計算し、8 ブロック分をまとめた集合を各パターンの**和の集合**と呼びます。

パターン	各ブロックの 2 数の和 (8 個)
I	3, 7, 14, 16, 18, 20, 27, 31
II	6, 22, 5, 13, 21, 29, 12, 28
III	6, 8, 7, 15, 19, 27, 26, 28
IV	3, 11, 10, 12, 22, 24, 23, 31

4 つの「和の集合」はすべて異なる構成です。それにもかかわらず、累乗和を計算してみると、3 乗和まで一致していることがわかります。

表3 パターン I~IV の和の集合における累乗和および積の総和の比較

パターン	1 乗和	2 乗和	3 乗和	積の総和
I	136	2,924	70,516	714
II	136	2,924	70,516	714
III	136	2,924	70,516	714
IV	136	2,924	70,516	714

さらにここでは、累乗和に加えて各パターンの**ブロック内2数積の総和**も確認しています。ブロック内2数積の総和は、各1×2ブロック内の2数の積を計算し、8ブロック分を合計した値です。たとえば分割パターンIについては、

$$(1 \times 2) + (3 \times 4) + (5 \times 9) + (6 \times 10) + (7 \times 11) + (8 \times 12) + (13 \times 14) + (15 \times 16) = 714$$

のように計算します。これが4つの集合において同じ数**714**を生み出していることが確かめられるのです。

#### 発見

異なる4つの分割パターンI~IVすべてにおいて、和の集合（各8個）の1乗から3乗までの累乗和、および各ブロック内の2数の積の総和が完全に一致する。すなわち、これらは**8-8-8-8 相愛数**♡♡♡をなす！

### 6.3 まだ謎の部分：なぜ3乗和まで一致するのか？

ここが本当に不思議なところです。完全分割であることだけからは、3乗和の一致は**導けません**。実際、次のような別の完全分割パターンを試してみましょう。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図10 分割パターンV

表4 分割パターン V における各ペアの計算値と参照値との比較

$k$	ペア $(a_k, b_k)$	$s_k = a_k + b_k$	$s_k^2$	$s_k^3$	$a_k b_k$
1	(1, 2)	3	9	27	2
2	(3, 4)	7	49	343	12
3	(5, 6)	11	121	1,331	30
4	(7, 8)	15	225	3,375	56
5	(9, 10)	19	361	6,859	90
6	(11, 12)	23	529	12,167	132
7	(13, 14)	27	729	19,683	182
8	(15, 16)	31	961	29,791	240
パターン V の合計		136	2,984	73,576	744
パターン I~IV の共通値		136	2,924	70,516	714
差 (V - I~IV)		0	+60	+3,060	+30
一致		✓	×	×	×

和の集合  $\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31\}$  の各要素について、表 4 に  $k$  乗和とブロック内の 2 数積の総和を示しました。1 乗和は  $3 + 7 + \dots + 31 = 136$  で一致しますが、2 乗和は  $9 + 49 + \dots + 961 = 2,984 \neq 2,924$ 、ブロック内の 2 数積の総和は  $2 + 12 + \dots + 240 = 744 \neq 714$  となり、2 乗和の段階ですでに一致しません。

つまり、完全分割であれば 1 乗和は自動的に一致しますが、2 乗和、3 乗和、そしてブロック内の 2 数積の総和の一致はまったく保証されません。4 つの分割パターン I~IV で 3 乗和まで一致したのは、**完全分割であることとは別に、より深い構造が働いているからにちがいありません。**

## 7 おわりに

本稿を振り返ってみましょう。

1. 4 次自然方陣の中に、左右反転の対称の位置にある 4-4 相愛数  $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$  ( $S_B$  と  $S_P$ ) が潜んでいる。
2. 外周の  $1 \times 3$  ブロック分割も、反転対称の位置にある 2 通りの分割パターン  $A \cdot B$  が潜んでいる。
3. それぞれの和集合  $T_A, T_B$  もまた 4-4 相愛数  $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$  をなす。これは等差数列の中央値とスケーリング不変性によって説明できる。
4. さらに  $T_A, T_B$  は各ブロック内の 3 数積の総和まで一致する。これは相愛数の性質と方陣の幾何的対称性という 2 つの独立な性質の合わせ技である。
5. 方陣全体の  $1 \times 2$  ブロック完全分割では、形状も対称性の種類も異なる 4 つのパターン I~IV が 8-8-8-8 相愛数  $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$  をなす。1 乗和、2 乗和の一致は完全分割から説明できるが、3 乗和の一致の背後にある構造はまだ解明されていない。

レクリエーション数学としての相愛数、そして教育への架け橋

本稿はレクリエーション数学として相愛数を紹介しましたが、その背後には整数論の未解決問題（Prouhet–Tarry–Escott 問題）から複素数平面の幾何学まで、本格的な数学が潜んでいます。「遊び」と「深い数学」がこれほど自然につながる題材は、そう多くありません。本シリーズ第1弾・第2弾と通読することで、「算数の計算遊び」から「未解決問題」「複素平面の幾何学」まで、一本の物語として体験していただけます。

教育的な観点からは、相愛数は次のような場面での活用が期待できます。

- **小・中学校**：電卓（あるいは筆算）を使った「数の宝探し」（エキサイティングなゲーム）として。1から16という身近な数の中に驚くほど美しい関係が潜んでいるという体験は、計算の練習を「構造の探究」へと変える力を持ちます。
- **高校・探究授業**：等差数列・累乗・スケーリングといった既習事項が、相愛数のミステリーを説明する道具として機能することを実感できます。「なぜ？」という問いから出発して証明まで辿り着く体験は、数学の本質的な営みそのものです。
- **プログラミング教育**：「4次自然方陣の $1 \times 2$ 完全分割を全探索せよ」は、中学・高校生にとって取り組みがいのあるプログラミング課題になります。数学とコンピュータサイエンスの接点として理想的です。
- **数学が得意な生徒への発展教材**：PTE問題・複素数平面との接続・群論の入り口として、高校数学の先にある世界を垣間見ることができます。

1から16というごく普通の数たちの中に、これほど精巧な対称構造が潜んでいた——。相愛数を通して、一つでも多くのひらめきとアハ体験（Aha! moment）が教室にもたらされることを心から願っています。

### 挑戦問題

以下の2つの問いにぜひ挑戦してみてください。

#### 1. 隠れた分割パターンを探せ

本稿では方陣全体の $1 \times 2$ 分割として4つのパターンI–IVを取り上げました。これらに共通する「幾何学的な特徴」は何でしょうか？また、パターンI–IV **以外**に、和の集合が同じ1乗から3乗和（136, 2,924, 70,516）を生み出すような $1 \times 2$ 完全分割は存在するのでしょうか？プログラムが書ける方は、全パターンを網羅的に探索してみてください。

#### 2. より大きな方陣へ

本稿では4次自然方陣に注目しましたが、より大きいサイズの方陣でも同様のことが起きるのでしょうか？たとえば次のような問いが考えられます。

- 6次自然方陣（1から36）を $1 \times 2$ ブロックや $1 \times 3$ ブロック、あるいはそれ以外の形状のブロックで完全分割したとき、和の集合が相愛数をなすような分割パターンは存在するか？
- 外周の $1 \times 3$ 分割で見られる「3倍スケーリング」という構造は、6次や8次方陣でも見られるか？

6次自然方陣における相愛数については、本シリーズの参考文献 *Math Horizons* (2026) もあわせてご覧ください。

相愛数の世界はまだ開拓されたばかりで「説明できることと、まだ説明できないこと」の境界線すらあいまいです。みなさんの探究が、次の発見が、この広大な世界の地図の一部となります。ぜひ挑戦してみてください！

## 参考文献

[1] Kenichi Takemura (2026) “The Magic of a 12-12-12 Split: Discovering Soaisu” (日本語タイトル：6次自然方陣における相愛数♡♡♡による均等3分割) , *Math Horizons*, pp. 21–23.

DOI: 10.1080/10724117.2025.2578498

[2] Kenichi Takemura (2026) “The beautiful soaisu partition,” *Chalkdust Magazine*, Issue 23 (19 April 2026).

<https://chalkdustmagazine.com/features/the-beautiful-soaisu-partition/>

[3] Kenichi Takemura (2026) “Algebraic symmetries and the 90-degree rotation complement theorem in domino tilings of order 4 natural squares,” *Utilitas Mathematica*, Volume 127, pp. 183–208.

DOI: 10.61091/um127-13