③ アプローチは部分的でも多面的に

前回までの話を振り返ると，与えられたいくつかの問題は一見異なるものの，**数学的な言語活動を通して立式**すれば，いくつかの物事（問題）が同じ問題として扱え統括できることを体感しました。また，**具体と抽象を往還する「学び」**については，日常生活における物事（問題）を数学的な簡易モデルとしてとらえると，教科書に掲載されている内容に帰着され，あらゆる物事（問題）が束ねられて伝えられているという，教科書の魅力と数学の特徴について話をしました。

今回は，中学数学と高校数学における**「学び」の移り変わり**を体感しながら，1つの問題でどのようなアプローチができるのかを考えてみたいと思います。**数学的活動と言語活動が紡ぎ合う世界によって，物事（問題）には多面的なアプローチが存在すること**を通達しながらも，いまだなされていないアプローチ（分野・単元）が存在することも視野に入れ，それらも同時に伝えていかなければならないものだと思います。そのようなことに直接思いを巡らすことも可能かもしれませんが，既存（既習）のことを整理しながら再考してみるという観点も，数学教育には欠かせないエッセンスだと思います。

例題 5

原点 O と点 A $(3,\ 4)$を通る直線をlとする。このとき，直線lとx軸の正の方向とのなす角$\theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$を二等分する直線$m$の方程式を求めよ。

中学生でもアプローチできるような題材の1つであり，高校数学では，習得する分野や単元によって，**振り返りの学び**を実現しやすい題材でしょう。つまり，新たな学びによって利活用する**知識と技能の選択肢**が増え，物事（問題）を紐解く**判断力**を培うにも利用しやすいと思います。このようなに，数学的活動のなかで育まれる複数の**表現力**は，他の物事（問題）に応用できる素地（プラットホーム）を生じることになります。以下の参考解説は，どれが金賞でどれが銀賞であるのかを定めるものではなく，あくまでも数学を学び多彩な言語活動を通し，表現力やアプローチが変化することで見える世界（景色）が増殖（拡張）し，それぞれの分野が他の世界と有機的につながりをもって機能している，すなわち，多面性を確認するためのものです。

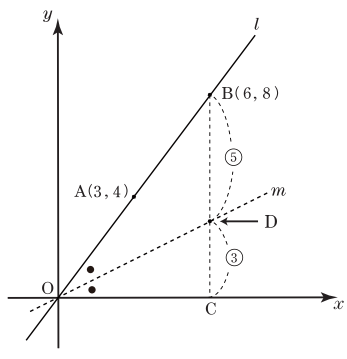
（参考 1 ：角の二等分線の性質の利用）

O を中心に A 方向に OA を 2 倍にのばした点を B $(6,\ 8)$とし，点 B からx軸に垂線をひき，その交点を C とする。

このとき，三平方の定理より

$$\mathrm{OB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

であり，直線lとx軸の正の方向とのなす角を二等分する直線mと BC との交点を D とすると，内角の二等分線と比の関係より



$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{OB}:\mathrm{OC}=10:6=5:3$$

である。ここで，点Dのx座標は6，y座標y_{D}は

$$y_{\mathrm{D}}=\frac{3}{3+5}\cdot 8=3$$

であるから，求める直線mの方程式は

$$y=\frac{3}{6}x，すなわち，y=\frac{1}{2}x$$ である。**（答）**

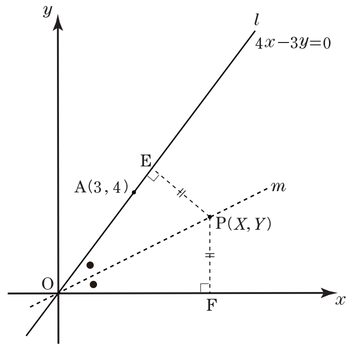
（参考２：合同な三角形 / 点と直線の距離の公式 / 軌跡と領域の考え）

求める直線m上の点を$\mathrm{P}(X, Y)$とおく。このとき，点Pから直線lおよびx軸にそれぞれ垂線をひき，その交点をそれぞれE，Fとすると，

$$\triangle\mathrm{OPE}\equiv\triangle\mathrm{OPF}$$

であり，これより$\mathrm{PE}=\mathrm{PF}$であるから，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|4X-3Y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|Y| \quad \cdots\cdots \quad ①$$



である。また，点$\mathrm{P}(X, Y)$は$Y<\dfrac{4}{3}X$，$Y>0$を満たすから，

①は

$$\frac{4X-3Y}{5}=Y$$

である。したがって，求める直線mの方程式は

$$y=\frac{1}{2}x$$ **（答）**

である。

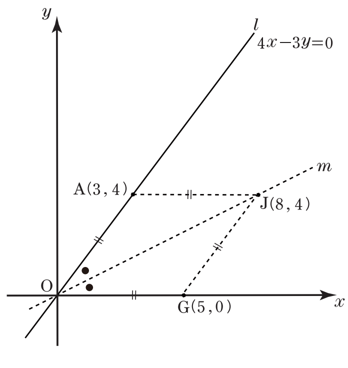
（※　式①は，$4X-3Y=\pm5Y$であるから，$y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-2x$が得られ，これより求める直線mの方程式を判断してもよいでしょう。）

（参考３：ベクトル / ひし形による角の二等分線の利用 / 束の考え）

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$であるから，$x$軸の正の方向に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=5$となる点Gをとる。すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$であり，四角形OGJAはひし形であるから，OJは直線lとx軸の正の方向とのなす角θをちょうど二等分する。

したがって，求める直線mの方程式は，$(0, 0)$, $(8, 4)$を



通るから

$$y=\frac{1}{2}x \qquad \text{（答）}$$

である。

【部分的にアプローチを変えてみよう！】

直線 l の方程式は $4x-3y=0$ であり，x 軸を表す方程式は $y=0$ であるから，k を定数として

$$(4x-3y)+k\cdot y=0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

を考えると，これは 2 つの直線の交点，すなわち，原点 O $(0,0)$ をつねに通る直線を表す。

ここで，②が J $(8,4)$ を通るとき

$$20+4k=0$$

すなわち

$$k=-5$$

であるから，この値を②に用いると

$$4x-3y-5y=0$$

すなわち，求める直線 m の方程式は

$$x-2y=0 \qquad \text{（答）}$$

である。

（※　解答としては遠回りですが，教科書にも掲載されている束の考えをこのような場面でも利活用できることを確認しました。）

（参考 4 ：三角関数の利用 / 加法定理（2 倍角）の利用）

直線 l と x 軸の正の方向とのなす角を 2θ とするとき，$\tan 2\theta=\frac{4}{3}$ を満たす。これより

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$$

すなわち

$$(2\tan\theta-1)(\tan\theta+2)=0$$

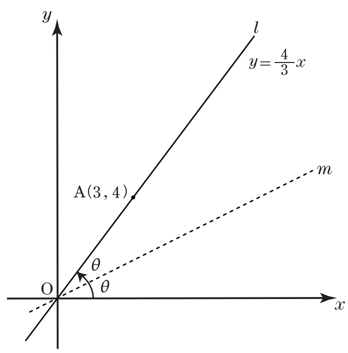
であるから

$$\tan\theta=\frac{1}{2},\ -2$$

したがって，求める直線 m の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x \qquad \text{（答）}$$

である。



（参考 5 ：方向ベクトル・法線ベクトル / 内積）

大きさ（長さ）の等しい 2 つのベクトルを，次のように定める。直線 l の方向ベクトルを $\vec{l}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ とし，x 軸（$y=0$）の方向ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ とする。

このとき，

$$\vec{l}-\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$と$\vec{l}-\vec{n}$はつねに直交するから

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=0$$

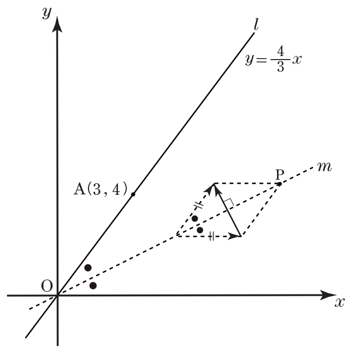
すなわち

$$-X+2Y=0$$

であるから，求める直線mの方程式は

$x-2y=0$ 　　（**答**）

である。



【部分的にアプローチを変えてみよう！】

$\vec{l}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$に直交する法線ベクトルを$\overrightarrow{l_\perp}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$とし，

これと同様に，$\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$の法線ベクトルを$\overrightarrow{n_\perp}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$と$\overrightarrow{l_\perp}$，$\overrightarrow{n_\perp}$のなす角を$\alpha$とし，

内積$\overrightarrow{l_\perp}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{n_\perp}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を考えると，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$であるから

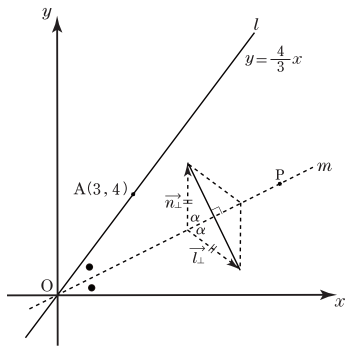
$$\overrightarrow{l_\perp}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{l_\perp}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\alpha,$$

$$\overrightarrow{n_\perp}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{n_\perp}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\alpha$$

である。これより

$$\cos\alpha=\frac{|4X-3Y|}{5\sqrt{X^2+Y^2}}=\frac{|5Y|}{5\sqrt{X^2+Y^2}}\qquad\cdots\cdots\quad ③$$

であり，③の右2式（波線部）は①と同じである。



以上のように，人は学びのなかで，何かを学ぶたびに解法の選択肢が増えています。つまり，**着眼する観点が異なるとアプローチも自然と変化し**，世界観がさらに拡がります。それと合わせ，③のように表現したことが実は，既習事項の式①と有機的な「学び」として機能し実現していることも数学のおもしろさ・奥深さの1つといえるのではないでしょうか。上記で述べられていない解法の選択もまだ存在するものだと思います。**物事（問題）を考えるおもしろさのきっかけは，基礎・基本に宿るもの**ではないのでしょうか。