数学甲子園® 2018

［文部科学省後援］第11回 全国数学選手権大会　Sugaku Koshien 2018

予 選

競技上の注意

1．開始の合図があるまで問題用紙を開かないでください。
2．制限時間は６０分です。
3．競技中は他の人と相談することはできません。
4．筆記用具，消しゴムのみ使用することができます。
5．途中提出することはできません。

解答上の注意

1．解答用紙には答えだけを書いてください。
2．答えが分数になるとき，約分してもっとも簡単な分数にしてください。
3．答えに根号が含まれるとき，根号の中の数はもっとも小さい正の整数にしてください。

公益財団法人
日本数学検定協会

数学甲子園®2018　第11回 全国数学選手権大会　予選

問題１．次の式を因数分解しなさい。

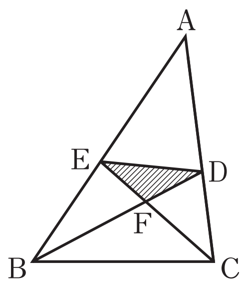
$$36x^2+6xy-12y^2+11x+26y-12$$

問題２．xについての２次不等式 $ax^2+bx+c \geqq 0$ の解が $x=\alpha$ であるとき，a，b，c の符号をそれぞれ求めなさい。

問題３．次の式を簡単にしなさい。

$$\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

問題４．AB＝6, BC＝4, CA＝5の△ABCがあり，∠ABCの二等分線と辺ACの交点をD，∠ACBの二等分線と辺ABの交点をE，線分CEとBDの交点をFとします。△ABCの面積を S とするとき，△DEFの面積を S を用いて表しなさい。



問題５．あるスーパーマーケットでは，１パック８個入りの卵が売られています。下のデータは，無作為に選んだ２つのパックA, Bに入っていた卵の重さ(単位：g)です。

A	59，62，60，63，62，59，61，62
B	62，59，58，61，60，63，58，59

それぞれのデータについて，分散を求めなさい。

問題６．$x=\omega+2i$ を解にもつ整数係数の n 次方程式のうち，次数が最小で x の最高次数の項の係数が１であるものを求めなさい。ただし，ω は $\omega^3=1$ を満たす虚数，i は虚数単位を表します。

問題７．$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ を，それぞれ t を用いて表しなさい。

問題８．正の整数 a，b に対して，a^2 は９桁，a^2b^4 は３４桁の数とします。このとき，a と b の桁数をそれぞれ求めなさい。

問題９．次の式を展開したときの項数を求め，n を用いて表しなさい。

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2$$

問題10．１から n（$n\geqq 2$）までの相異なる n 個の整数の中から無作為に２個選びます。大きい数を X，小さい数を Y とするとき，X の期待値を求めなさい。

問題11. すべての辺の長さが a である正四角錐と，１辺の長さが a である正四面体があります。この２つの立体の正三角形の面をぴったりとくっつけてできる立体は，何面体ですか。

問題12. xy 平面において，次の連立不等式が表す図形の面積を求めなさい。

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 \geqq 0 \\ |x| + |y| \leqq 1 \end{cases}$$

問題13. a，b，c，d を正の整数とします。線分ＡＢを $a:b$ に内分する点をＣ，$c:d$ に内分する点をＤとするとき，ＡＣ：ＣＤ：ＤＢを a，b，c，d を用いた整数比で表しなさい。ただし，点Ａ，Ｃ，Ｄ，Ｂはこの順に並んでいるものとします。

問題14. △ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの長さをそれぞれ a，b，c とします。次の等式が成り立つとき，△ＡＢＣの内角のうち，最大の角の大きさを求めなさい。

$$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$$

問題15. k を正の整数とします。$P(k)=1^k+2^k+3^k+4^k+5^k+6^k$ とすると

$$P(1)=1+2+3+4+5+6=21$$
$$P(2)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$
$$P(3)=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441$$

であり，$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$ はすべて７の倍数となりますが，k の値によっては７の倍数にならないこともあります。$P(k)$ が７の倍数にならない k の値をすべて求めなさい。

問題16. 次の等式を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めなさい。

$$xy^3-3y-x=1$$

問題17. 連続する５つの正の整数について，下の法則が成り立ちます。

$$1\times2\times3\times4\times5+5=125=5\times5^2$$
$$2\times3\times4\times5\times6+6=726=6\times11^2$$
$$3\times4\times5\times6\times7+7=2527=7\times19^2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

このとき，次の等式を満たす正の整数nの値を求めなさい。

$$2016\times2017\times2018\times2019\times2020+2020=2020\times n^2$$

問題18. さいころＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄを同時に振り，出た目をそれぞれa，b，c，dとします。このとき，放物線$y=ax^2+bx+c$の頂点の座標が$(-1,\ d)$となる確率を求めなさい。ただし，さいころの目は１から６まであり，どの目も出る確率は等しいものとします。

問題19. ＯＡ＝３，ＯＢ＝４，∠ＡＯＢ＝６０°である△ＯＡＢにおいて，辺ＯＡの中点を通りＯＡに垂直な直線と，辺ＯＢの中点を通りＯＢに垂直な直線との交点をＱとします。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

問題20. $f(x)=\int_{-1}^{1}(4x-2t)f(t)\,dt+3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

数学検定