

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 1.

a を正の定数とします。 $2a$ だけ離れた定点 P, Q を中心として、同じ半径 r の球をつくれます。 2つの球の和集合(合併)の体積を $V(r)$ とするとき、 $V(r)$ を r の関数として表しなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題2.

1辺が6の正三角形の内部に、互いに重ならない3個の円をかき、それらの面積和を考えます。

図1のように、3個の合同な円を、互いに外接しそれぞれ2辺に接するようにかく場合と、図2のように、内接円1個と、それに外接して2辺に接する小円2個をかく場合とでは、どちらの面積和がどれだけ大きいですか。

図1

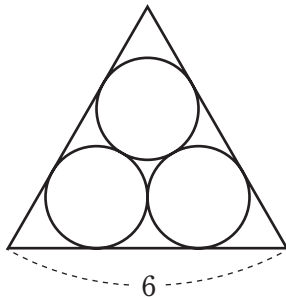
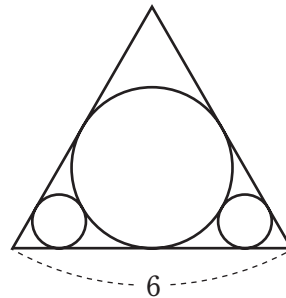


図2



※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題3.

i を虚数単位とし、 a を正の定数とします。複素数 z が $|z| \leq a$ を満たすとき、複素数 $w = i(z + a^2)$ について、 $|w|$ の最小値を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題4.

四面体には、外接する球が必ず存在します。四面体 $ABCD$ において、 $AB=CD=4$ ， $AC=BD=5$ ， $AD=BC=6$ です。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とし、四面体 $ABCD$ に外接する球の中心を O とすると、 $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ ， $\vec{d}$ を用いて表しなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題5.

次のような「石とりゲーム」の必勝法について考えます。

ゲームのルール

- n 個の碁石を置き，2人で交互に石をとりあう。
- 1人が一度にとる個数は1個以上 k 個以下とする。
- 最後に石をとった者を勝ちとする。

このゲームは，正の整数 n ， k の値によって，先手必勝か後手必勝かが決まります。
たとえば， $n=3$ ， $k=2$ のときは

- 先手が1個とれば残りは2個，よって後手が2個とれば後手の勝ち
- 先手が2個とれば残りは1個，よって後手が1個とって後手の勝ち

より，後手必勝となります。また， $n=4$ ， $k=2$ のときは，先手が1個とれば「残り3個」の局面を相手に渡すことができるので，先手必勝となります。

$k=4$ のとき，先手必勝となるような100以下の正の整数 n は，全部で何個ありますか。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題6.

ある整数の平方で表される数を完全平方数といいます。完全平方数でない正の整数 n に対して、 $f(n)$ を次のように定義します。

「 $n = a_0$ とし、 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$ という正の整数列をつくって

$$a_0 \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_\ell$$

が完全平方数になるようにする。このような列のうち、 a_ℓ の値が最小のものについて、 $f(n) = a_\ell$ とする。」

たとえば、 $n = 2$ のとき、 $2 \times 3 \times 6 (= 6^2)$ と $2 \times 8 (= 4^2)$ はともに完全平方数ですが、 $6 < 8$ であり、 a_ℓ の値は6より小さくできないので、 $f(2) = 6$ です。

このとき、 $f(20)$ を求めなさい。

※余白は計算する場所として使用できます。 解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 7.

n を 4 以上の整数とします。 n 人の生徒を 2 つの区別できない組に分け、どちらの組も 2 人以上にするとき、その分け方は全部で何通りありますか。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題8.

音の強さのレベルを表す単位として、dB(デシベル)があります。振動数が1 kHzである音の最小可聴値の強さを $I_0 (=10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2})$ とすると、強さ $I (\text{W} \cdot \text{m}^{-2})$ の音のレベル α (dB) は、次の式で表されます。

$$\alpha = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

80 dB の音の強さは、75 dB の音の強さの何倍ですか。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題9.

ある地域で収穫された人参のうち、規格外品である割合は15 %であると予想されています。このことを確かめるため、この地域で今年収穫した人参から無作為に何本かを選び、規格外品である割合を調査したいと考えています。この調査において「規格外品である割合が13.5 %以上16.5 %以下」である確率を0.95以上であるようにするとき、少なくとも何本選べばよいですか。答えは一の位を切り上げて十の位までの概数で答えなさい。ただし、次のことを仮定します。

- 今年収穫する人参の本数および上の調査で無作為に選ぶ人参の本数は、ともに十分多いものとし、上の調査における「規格外品である割合」は(近似的に)正規分布に従うとします。
- 平均0、標準偏差1の正規分布に従う確率変数 X において、 $P(|X| \leq x) = 0.95$ を満たす x の値は2であるとしします。

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 10.

実数 x , y , z , w が次の式を満たすとき, x の値を求めなさい。

$$x = \frac{2}{w-2}, \quad y = \frac{2}{x-3}, \quad z = \frac{2}{y-12}, \quad w = \frac{2}{z-3}$$

※余白は計算する場所として使用できます。解答用紙には答えだけを書いてください。

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 11.

A rope of length 180 m is cut into several pieces, whose lengths form an arithmetic sequence with common difference d m. If the shortest piece is 1 m long and the longest piece is 23 m long, find the value of d .

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 12.

The positive difference between the zeros of the quadratic expression $x^2 + kx + 3$ is $\sqrt{109}$.

Find the possible values of k .

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 13.

Find the constant term in the expansion of $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^9$.

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 14.

What base-10 fraction is represented by the base-5 decimal $0.\overline{3}_5$?

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.

数学甲子園[®]2016 第9回 全国数学選手権大会 1st Stage

問題 15.

There are four points in space, not all in the same plane. How many planes can be drawn such that they are equidistant from these points?

※ You may use the space below for scratch work. Write only your answer in the answer sheet.